

1 26.09 - Introduzione al corso. Richiami sulle serie geometriche. Serie di potenze. Intervallo di convergenza, raggio di convergenza. Esempi.

1.1 La Serie geometrica

Consideriamo serie geometrica di ragione x

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ridotta n -sima

$$s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$$

Se $x = 1$ si ha

$$s_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n.$$

Sia $x \neq 1$. Si ha

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Se $|x| < 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ e pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Se $x > 1$, poichè $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x^n - \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

Sia ora $x = -1$,

$$s_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2p \\ 1 & , \quad n = 2p + 1 \end{cases}$$

Pertanto la successione $(s_n)_{\mathbb{N}}$ non è regolare.

Sia infine $x < -1$. Possiamo scrivere $x = -|x|$, e quindi

$$s_n = \frac{1 - (-|x|)^n}{1 + |x|} = \frac{1 - (-1)^n |x|^n}{1 + |x|} = \begin{cases} \frac{1 - |x|^{2p}}{1 + |x|}, & n = 2p \\ \frac{1 + |x|^{2p-1}}{1 + |x|}, & n = 2p - 1 \end{cases}$$

Ne segue che $S_{2p} \rightarrow -\infty$ e $S_{2p-1} \rightarrow +\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & x \in (-1, 1) \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

1.2 Definizione e prime proprietà

La Serie geometrica costituisce un caso particolare di serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

quando $a_n = 1 \quad n = 0, 1, \dots$ e $x_0 = 0$.

In generale i coefficienti a_n costituiscono una successione di numeri reali.

Con una traslazione $y = x - x_0$ possiamo ricondurci al caso $x_0 = 0$

Infatti supponiamo di dover studiare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - 1)^n$$

Si pone $y = x - 1$ e si studia

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n,$$

che sappiamo essere convergente per $|y| < 1$.

$$|y| < 1 \iff |x - 1| < 1 \iff -1 < x - 1 < 1 \iff 0 < x < 2$$

Concentriamo la nostra analisi sul ruolo dei coefficienti a_n . Osserviamo di aver incontrato già le serie di potenze con nello studio delle serie numeriche (oltre le serie geometriche). Facciamo alcuni esempi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. Il caso $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie diverge (serie armonica), per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge è dato da $(-1, 1) \cup \{-1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie converge, per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge è dato da $(-1, 1) \cup \{-1, 1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per ogni x reale.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge solo per $x = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < \frac{1}{3}$. $|x| = \frac{1}{3}$ deve essere studiato separatamente per $x = \frac{1}{3}$ la serie diverge, per $x = -\frac{1}{3}$ la serie è indeterminata.

Vediamo negli esempi che l'insieme di convergenza è un intervallo, l'analisi nei punti di estremo dell'intervallo varia da caso a caso. Il raggio di convergenza è la metà della lunghezza di tale intervallo.

Osserviamo che questa definizione è estendibile al caso complesso. Sia $z \in \mathbb{C}$. Ripartendo dalla serie geometrica e ricordando che

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} \text{ è il modulo di } z.$$

abbiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge se $|z| < 1$. Nel piano complesso $(\Re z, \Im z)$ l'insieme $\sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} < 1$ individua il cerchio di centro 0 e raggio 1 privato della circonferenza. Il raggio di convergenza (in questo caso si ha perfetta corrispondenza con l'immagine grafica) è 1.

Dimostriamo ora che l'intuizione maturata sulla struttura dell'insieme di convergenza corrisponde a un risultato matematico.

Proposizione 1. *Se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge in un punto x_1 allora converge (assolutamente) in ogni punto x tale che $|x| < |x_1|$.

Dimostrazione. Sappiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

converge. Assumiamo $x_1 \neq 0$. Ne segue dalla condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n x_1^n = 0,$$

ne segue che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per $n > N$

$$|a_n x_1^n| < 1.$$

Allora per $n > N$

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x^n}{x_1^n} \right| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

Quindi tenuto conto che $|a_n x_1^n| < 1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

L'ultima serie converge se $|x| < |x_1|$. □

2 28.09 Il criterio della radice e del rapporto per serie di potenze. Esempi di applicazione. Equazioni differenziali e serie di potenze. Calcolo dei coefficienti. Equazione di Bessel di ordine zero.

2.0.1 Criteri per la determinazione del raggio di convergenza

Teorema 2.1. (*Criterio di Cauchy*) Se esiste il limite (anche $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}$$

Teorema 2.2. (*Criterio di D'Alembert*) Sia $a_n \neq 0$, per ogni n . Se esiste il limite (anche $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}.$$

Se $l = +\infty$ allora $r = 0$, se $l = 0$ allora $r = +\infty$

Esercizio 2.3. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{x}{3} \right)^n.$$

Risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{x}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{3} \right)^n x^n$$

Calcoliamo

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1) \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{n \left(\frac{1}{3} \right)^n} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Ne segue $l = \frac{1}{3}$ e $r = 3$

Ricapitolando: data la serie di potenze, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ determiniamo il raggio di convergenza r (i criteri non fanno intervenire x). Allora la serie converge assolutamente per $|x| < r$, non converge per $|x| > r$, in generale nulla si può dire per $|x| = r$.

Ricapitolando

Teorema 2.4. *Data la serie di potenze si verifica sempre uno dei seguenti casi*

- la serie converge per $x = 0$
- la serie converge per ogni x reale
- la serie converge per $|x| < r$ e non converge per $|x| > r$

2.1 Serie lacunari

Una serie di potenze che abbia infiniti coefficienti nulli si chiama serie lacunare. Un esempio di serie lacunare è il seguente

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2n}.$$

Anche se possiamo stabilire il raggio di convergenza della serie $r = \sqrt{2}$, tuttavia osserviamo che non possiamo applicare il criterio della radice o il criterio del rapporto in quanto possiamo individuare due sottosuccessioni (date dagli indici pari e dagli indici dispari) che convergono a limiti distinti.

2.2 Serie di Potenze ed equazione di Bessel di ordine zero

Illustriamo il Metodo di Frobenius per illustrare come determinare la soluzione dell'equazione di Bessel di ordine 0.

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, \quad x > 0$$

Ricordiamo le equazioni di Bessel di ordine n

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0, \quad x > 0$$

Aggiungiamo la condizione in $x = 0$, $y(0) = 1$,

$$y'(x) = -xy''(x) - xy(x), \quad y'(0) = 0$$

Ricapitolando vogliamo risolvere

$$\begin{cases} xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, & x > 0, \\ y(0) = 1, & y'(0) = 0 \end{cases}$$

Assumiamo che la soluzione sia esprimibile in serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dalla condizione $y(0) = 1$ si ricava $a_0 = 1$. Dunque

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} x^{m+1}$$

Calcoliamo i singoli termini

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y'(x) = a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_{n+2}x^{n+1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \quad xy''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}$$

Sostituendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} + a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_{n+2}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Riordinando

$$a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + (n+2)^2 a_{n+2} \right) x^{n+1} = 0.$$

Ricaviamo $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

$$a_n + (n+2)^2 a_{n+2} = 0 \quad a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2} a_n$$

Se n è dispari $a_n = 0$, se n è pari allora $n = 2k$ $k \in \mathbb{N}$

$$a_{2(k+1)} = -\frac{1}{2^2(k+1)^2} a_{2k}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2^2} a_0 = -\frac{1}{2^2}$$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} a_0 = \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^4}$$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} a_4 = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^4} = -\frac{1}{2^6} \frac{1}{(3!)^2}$$

...

...

...

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 0, \\ a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2}, \end{cases}$$

Otteniamo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \frac{x^{2n}}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

funzione di Bessel di ordine 0.

3 29.09 Serie di Potenze: Integrale e Derivata. Serie di Taylor. Resto integrale e di Lagrange.

3.1 Serie di Potenze: Integrale e Derivata

3.1.1 Derivazione termine a termine

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad |x| < r.$$

La serie derivata

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (applicare il criterio di D'Alembert), la somma $f(x)$ è derivabile e vale

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad |x| < r.$$

Vediamo un'applicazione del risultato.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1} \quad |x| < 1$$

3.1.2 Integrazione termine a termine

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad |x| < r.$$

Si ha

$$\int_0^x f(s) ds = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad |x| < r$$

Utilizziamo questo risultato.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \quad |x| < 1,$$

Integrando

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad |x| < 1$$

Possiamo utilizzare il risultato per integrare per serie alcune funzioni non integrabili elementarmente. Per $a > 0$ calcoliamo

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} a^{2n+1}.$$

Introduciamo la funzione degli errori introdotta da Gauss

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} t^{2n} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Esercizio 1.

$$\int_0^2 t^2 e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^2 t^{n+2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{2^{n+3}}{n+3}.$$

3.2 Serie di Taylor

Data una funzione $f \in C^\infty(x_0 - r, x_0 + r)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

si dice serie di Taylor relativa al punto x_0 . Se vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad |x - x_0| < r,$$

la funzione f si dice sviluppabile in serie di Taylor per x : $|x - x_0| < r$.

Il seguente esempio mostra che esistono funzioni $f \in C^\infty(-r, r)$ che non sono uguali alla serie di Taylor.

Esempio 3.1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La funzione presenta derivate tutte nulle in $x_0 = 0$, e quindi la serie di Taylor ad essa relativa vale 0 e non coincide con la funzione.

Funzioni analitiche (in senso reale).

Definizione 3.2. Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo con $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$) si dice analitica in senso reale se è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ di x_0 . f si dice analitica in I se è analitica in ogni punto di I .

Ci occupiamo di condizioni di sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor.

Definizione 3.3. Se f è derivabile $n + 1$ volte, il resto dato dalla formula di Taylor

$$r(x_0, n, x) = r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Sappiamo (resto di Peano) che

$$r(x_0, n, x) = o((x - x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0.$$

Ci occupiamo di condizioni per cui

$$r(x_0, n, x) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

3.3 Resto Integrale e di Lagrange

Deduciamo ora altre espressioni del resto

Teorema 3.4. Se f è derivabile $n + 1$ volte, il resto si può esprimere

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!} (x - t)^n dt$$

Dimostrazione. La dimostrazione del risultato segue il principio di induzione. Per $n = 0$ il risultato segue da

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

Assumiamo vera l'affermazione al passo $n - 1$. Il resto al passo $n - 1$ si esprime

$$r_{n-1}(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Si ha

$$\begin{aligned} r_{n-1}(x_0, x) &= \int_{x_0}^x \frac{f^n(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} dt = \int_{x_0}^x \frac{f^n(t)}{(n-1)!} \left[-\frac{(x-t)^n}{n} \right]' dt = \\ &= - \left[\frac{(x-t)^n}{n!} f^n(t) \right]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \\ &= \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \end{aligned}$$

In conclusione

$$r(x_0, n-1, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt,$$

e quindi

$$\begin{aligned} r_n(x_0, x) &= f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x-x_0)^k - \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) = \\ &= \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt. \end{aligned}$$

□

Dalla formula del resto integrale si deduce la formula del resto di Lagrange.

Teorema 3.5. *Se f è derivabile $n + 1$ volte in un intervallo I e x, x_0 sono punti di I , esiste un punto ξ compreso tra x e x_0 tale che*

$$r_n(x_0, x) = f^{n+1}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!},$$

Dimostrazione.

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt =$$

Assumiamo $x > x_0$. In $[x_0, x]$ si ha

$$m \leq f^{n+1}(t) \leq M,$$

essendo

$$m = \min_{[x_0, x]} f^{n+1}(t) \quad M = \max_{[x_0, x]} f^{n+1}(t).$$

Abbiamo

$$m \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \leq \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt \leq M \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Ossia

$$m \leq \left[\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \right]^{-1} \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt \leq M$$

Dal teorema dei valori intermedi applicato a f^{n+1} , si ha che esiste ξ per cui

$$f^{n+1}(\xi) = \left[\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \right]^{-1} \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt,$$

da cui la tesi. □

4 03.10 Sviluppi in serie di Taylor di alcune funzioni, e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log(1 + x)$, $\arctan x$. Serie di potenze complesse, formula di Eulero, funzioni complesse e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$

4.1 Condizioni di convergenza

Teorema 4.1. *Se la funzione f è derivabile infinite volte in un intervallo (a, b) e se esistono due numeri reali L e M tali che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq ML^n \quad \forall x \in (a, b) \quad \forall n,$$

allora per ogni $x_0 \in (a, b)$ la funzione è sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0 .

La dimostrazione è basata sull'analisi del resto.

Esempi di funzioni analitiche in \mathbb{R} : e^x , $\sin x$, $\cos x$.

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

La dimostrazione segue dall'espressione del resto di Lagrange.

Esercizio 1.

$$e^{x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{n!}.$$

Esercizio 2.

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

4.2 Serie di potenze in \mathbb{C}

$$z^k = (x + iy)^k$$

La serie geometrica (per $|z| < 1$)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k.$$

La serie di potenza in \mathbb{C}

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

Definiamo l'esponenziale complesso

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Una funzione f definita su un sottoinsieme aperto A di \mathbb{R} o \mathbb{C} è analitica se è rappresentabile localmente come una serie di potenze: ogni numero $x_0 \in A$ ha un intorno aperto $A' \subset A$, tale che esiste una serie di potenze con centro x_0 che converge a $f(x)$ per ogni $x \in A'$.

Ogni serie di potenze con raggio di convergenza positivo fornisce una funzione analitica sull'interno della sua regione di convergenza. Ogni funzione olomorfa (derivabile in senso complesso, vedremo più avanti) è una funzione analitica complessa.

Le formula di Eulero: per $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Per $z \in \mathbb{C}$ definiamo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos hz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sin hz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Esercizi.

5 05.10 Funzioni trigonometriche. Esercizi. Ortogonalità delle funzioni trigonometriche. Sistema ortonormale

5.1 Esercizi: La formula del Binomio e la Formula di Eulero

Le formula di Eulero: per $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ricordiamo la

Formula di triplicazione

$$\begin{aligned} \cos 3x + i \sin 3x &= (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \\ &= \cos^3 x - i \sin^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \sin^2 x \cos x. \end{aligned}$$

Uguagliando la parte reale e la parte immaginaria dei due numeri

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\sin(3x) = -\sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x$$

Più in generale si ha

Proposizione 2. *Si ha*

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \quad n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) = \left(\frac{(e^{ix})^n + (e^{-ix})^n}{2} \right) = \\ &= \frac{(\cos x + i \sin x)^n + (\cos x - i \sin x)^n}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\cos^k x (i \sin x)^{n-k} + \cos^k x (-i \sin x)^{n-k}}{2} = \\
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(i)^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x = \\
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i\pi}{2}})^{n-k} + (e^{-\frac{i\pi}{2}})^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x = \\
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i(n-k)\pi}{2}}) + (e^{-\frac{i(n-k)\pi}{2}})}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x = \\
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x
\end{aligned}$$

□

Esercizio 5.1. Dalla formula di Eulero, $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria $i^2 = -1$.

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

ricavare

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \quad n \in \mathbb{N}$$

Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π

Proposizione 3. Si ha

$$\sum_{k=0}^n \sin(kx) = \frac{-\cos(n + \frac{1}{2})x + \cos \frac{x}{2}}{2 \sin(\frac{x}{2})}$$

e

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin(\frac{x}{2})} + \frac{1}{2}$$

5.2 Ortonormalità

Per $n = 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, \dots$ risulta

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \neq 0 \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx &= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \delta_{m,n}; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \delta_{m,n}$$

$\delta_{m,n}$ è il simbolo di Kronecker

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

Identità di Weber per $n, m \in \mathbb{N}$

$$\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} ((\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)))$$

$$\sin(nx) \cos(mx) = \frac{1}{2} ((\sin((n-m)x) + \sin((n+m)x)))$$

$$\cos(nx) \cos(mx) = \frac{1}{2} ((\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)))$$

6 06/10 Esercizi

Esercizio 1. Per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$1) \frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

$$2) \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

a) vera

b) la prima è vera e la seconda è falsa

c) la seconda è vera e la prima è falsa

d) entrambe false

Esercizio 2.

Per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$1) \sin(-z) = -\sin z$$

$$2) \cos(-z) = \cos(z)$$

a) vera

b) la prima è vera e la seconda è falsa

c) la seconda è vera e la prima è falsa

d) entrambe false

Esercizio 3. Sia $z \in \mathbb{C}$. Allora

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

a Vero

b Falso

Esercizio 4. Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!}$$

a Vero

b Falso

Esercizio 5.Per ogni $y \in \mathbb{R}$:

1) $\sin(iy) = i \sinh y$

2) $\cos(iy) = i \sinh y$

 a) vera b) la prima è vera e la seconda è falsa c) la seconda è vera e la prima è falsa d) entrambe false**Esercizio 6.**Per ogni $z = x + iy \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$:

1) $|\sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$

2) $|\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y)$

 a) vera b) la prima è vera e la seconda è falsa c) la seconda è vera e la prima è falsa d) entrambe false**Soluzione Esercizi****Esercizio 1.** A Vere entrambe. Infatti

$$\frac{d}{dz} \sin z = \frac{1}{2i} \frac{d}{dz} (e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i} i (e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z.$$

La seconda si dimostra in modo analogo.

Esercizio 2. A Vere entrambe. Infatti

$$\sin(-z) = \frac{1}{2i} (e^{-iz} - e^{iz}) = -\sin z.$$

La seconda si dimostra in modo analogo.

Esercizio 3. A Vero. Infatti $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$ é vera segue dall'espressione di $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ e $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ **Esercizio 4.** B Falsa. Infatti

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Esercizio 5. B La prima é vera la seconda é falsa. Infatti

$$\sin iy = \frac{1}{2i}(e^{i^2y} - e^{-i^2y}) = \frac{-1}{i} \sinh y = i \sinh y.$$

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^{i^2y} + e^{-i^2y}) = \cosh y.$$

Esercizio 6. A Vera.

Poiché, utilizzando l'esercizio precedente,

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Si ha

$$\begin{aligned} |\sin(x + iy)|^2 &= (\sin x \cosh y)^2 + (\cos x \sinh y)^2 = (\sin x)^2(1 + \sinh^2 x) + (\cos x \sinh y)^2 \\ &= \sin^2 x + ((\sin x)^2 + (\cos x)^2) \sinh^2 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\cos(x + iy)|^2 &= (\cos x \cosh y)^2 + (\sin x \sinh y)^2 = (\cos x)^2(1 + \sinh^2 x) + (\sin x \sinh y)^2 \\ &= \cos^2 x + ((\sin x)^2 + (\cos x)^2) \sinh^2 x. \end{aligned}$$