1 26.09 - Introduzione al corso. Richiami sulle serie geometriche. Serie di potenze. Intervallo di convergenza, raggio di convergenza. Esempi.

1.1 La Serie geometrica

Consideriamo serie geometrica di ragione x

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ridotta n-sima

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

.

Se $x = 1$ si ha

$$s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Sia $x \neq 1$. Si ha

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Se $|x| < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Se $x > 1$, poichè $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \cdot \lim_{n\to\infty} x^n - \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

Sia ora $x = -1$,

$$s_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2p \\ 1 & , \quad n = 2p + 1 \end{cases}$$

Pertanto la successione $(s_n)_{\mathbb{N}}$ non è regolare.
Sia infine $x < -1$. Possiamo scrivere $x = -|x|$, e quindi

$$\begin{aligned} s_n = \frac{1 - (-|x|)^n}{1 + |x|} &= \frac{1 - (-1)^n |x|^n}{1 + |x|} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1 - |x|^{2p}}{1 + |x|}, & n = 2p \\ \dfrac{1 + |x|^{2p-1}}{1 + |x|}, & n = 2p - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ne segue che $S_{2p} \to -\infty$ e $S_{2p-1} \to +\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{n\to\infty} s_n$
Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1 - x} & x \in (-1, 1) \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

1.2 Definizione e prime proprietà

La Serie geometrica costituisce un caso particolare di serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

quando $a_n = 1 \quad n = 0, 1, \ldots\ldots$ e $x_0 = 0$.
In generale i coefficienti a_n costituiscono una successione di numeri reali.
Con una traslazione $y = x - x_0$ possiamo ricondurci al caso $x_0 = 0$
Infatti supponiamo di dover studiare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - 1)^n$$

Si pone $y = x - 1$ e si studia

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n,$$

che sappiamo essere convergente per $|y| < 1$.

$$|y| < 1 \iff |x - 1| < 1 \iff -1 < x - 1 < 1 \iff 0 < x < 2$$

Concentriamo la nostra analisi sul ruolo dei coefficienti a_n. Osserviamo di aver incontrato già le serie di potenze con nello studio delle serie numeriche (oltre le serie geometriche). Facciamo alcuni esempi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. Il caso $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie diverge (serie armonica), per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge è dato da $(-1, 1) \cup \{-1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie converge, per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge è dato da $(-1, 1) \cup \{-1, 1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per ogni x reale.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge solo per $x = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < \frac{1}{3}$. $|x| = \frac{1}{3}$ deve essere studiato separatamente per $x = \frac{1}{3}$ la serie diverge, per $x = -\frac{1}{3}$ la serie è indeterminata.

Vediamo negli esempi che l'insieme di convergenza è un intervallo, l'analisi nei punti di estremo dell'intervallo varia da caso a caso. Il raggio di convergenza è la metà della lunghezza di tale intervallo.

Osserviamo che questa definizione è estendibile al caso complesso. Sia $z \in \mathbb{C}$. Ripartendo dalla serie geometrica e ricordando che

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} \text{ è il modulo di } z.$$

abbiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge se $|z| < 1$. Nel piano complesso $(\Re z, \Im z)$ l'insieme $\sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} < 1$ individua il cerchio di centro 0 e raggio 1 privato della circonferenza. Il raggio di convergenza (in questo caso si ha perfetta corrispondenza con l'immagine grafica) è 1.

Dimostriamo ora che l'intuizione maturata sulla struttura dell'insieme di convergenza corrisponde a un risultato matematico.

Proposizione 1. *Se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge in un punto x_1 *allora converge (assolutamente) in ogni punto* x *tale che* $|x| < |x_1|$.

Dimostrazione. Sappiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

converge. Assumiamo $x_1 \neq 0$. Ne segue dalla condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n \to +\infty} a_n x_1^n = 0,$$

ne segue che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per $n > N$

$$|a_n x_1^n| < 1.$$

Allora per $n > N$

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x^n}{x_1^n} \right| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

Quindi tenuto conto che $|a_n x_1^n| < 1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

L'ultima serie converge se $|x| < |x_1|$. $\square$

2 28.09 Il criterio della radice e del rapporto per serie di potenze. Esempi di applicazione. Equazioni differenziali e serie di potenze. Calcolo dei coefficienti. Equazione di Bessel di ordine zero.

2.0.1 Criteri per la determinazione del raggio di convergenza

Teorema 2.1. *(Criterio di Cauchy) Se esiste il limite (anche $+\infty$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}$$

Teorema 2.2. *(Criterio di D'Alembert) Sia $a_n \neq 0$, per ogni n. Se esiste il limite (anche $+\infty$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}.$$

Se $l = +\infty$ allora $r = 0$, se $l = 0$ allora $r = +\infty$

Esercizio 2.3. *Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n$$

Calcoliamo

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n}).$$

Ne segue $l = \frac{1}{3}$ e $r = 3$

Ricapitolando: data la serie di potenze, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ determiniamo il raggio di convergenza r (i criteri non fanno intervenire x). Allora la serie converge assolutamente per $|x| < r$, non converge per $|x| > r$, in generale nulla si può dire per $|x| = r$.

Ricapitolando

Teorema 2.4. *Data la serie di potenze si verifica sempre uno dei seguenti casi*

- *la serie converge per* $x = 0$
- *la serie converge per ogni* x *reale*
- *la serie converge per* $|x| < r$ *e non converge per* $|x| > r$

2.1 Serie lacunari

Una serie di potenze che abbia infiniti coefficienti nulli si chiama serie lacunare. Un esempio di serie lacunare è il seguente

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2n}.$$

Anche se possiamo stabilire il raggio di convergenza della serie $r = \sqrt{2}$, tuttavia osserviamo che non possiamo applicare il criterio della radice o il criterio del rapporto in quanto possiamo individuare due sottosuccessioni (date dagli indici pari e dagli indici dispari) che convergono a limiti distinti.

2.2 Serie di Potenze ed equazione di Bessel di ordine zero

Illustriamo il Metodo di Frobenius per illustrare come determinare la soluzione dell'equazione di Bessel di ordine 0.

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, \qquad x > 0$$

Ricordiamo le equazioni di Bessel di ordine n

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0, \qquad x > 0$$

Aggiungiamo la condizione in $x = 0$, $y(0) = 1$,

$$y'(x) = -xy''(x) - xy(x), \qquad y'(0) = 0$$

Ricapitolando vogliamo risolvere

$$\begin{cases} xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, & x > 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Assumiamo che la soluzione sia esprimibile in serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dalla condizione $y(0) = 1$ si ricava $a_0 = 1$. Dunque

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} x^{m+1}$$

Calcoliamo i singoli termini

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y'(x) = a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \qquad xy''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+1}$$

Sostituendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+1} + a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Riordinando

$$a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + (n+2)^2 a_{n+2} \right) x^{n+1} = 0.$$

Ricaviamo $a_0 = 1, \quad a_1 = 0$.

$$a_n + (n+2)^2 a_{n+2} = 0 \qquad a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2} a_n$$

Se n è dispari $a_n = 0$, se n è pari allora $n = 2k$ $k \in \mathbb{N}$

$$a_{2(k+1)} = -\frac{1}{2^2 (k+1)^2} a_{2k}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2^2} a_0 = -\frac{1}{2^2}$$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2} a_0 = \frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2}\frac{1}{2^4}$$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{3^2} a_4 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{3^2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^4} = -\frac{1}{2^6}\frac{1}{(3!)^2}$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 0, \\ a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2}, \end{cases}$$

Otteniamo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \frac{x^{2n}}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n}$$

funzione di Bessel di ordine 0.

3 29.09 Serie di Potenze: Integrale e Derivata. Serie di Taylor. Resto integrale e di Lagrange.

3.1 Serie di Potenze: Integrale e Derivata

3.1.1 Derivazione termine a termine

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < r.$$

La serie derivata

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (applicare il criterio di D'Alembert), la somma $f(x)$ è derivabile e vale

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad |x| < r.$$

Vediamo un'applicazione del risultato.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

3.1.2 Integrazione termine a termine

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < r.$$

Si ha

$$\int_0^x f(s) ds = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x| < r$$

Utilizziamo questo risultato.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad |x| < 1,$$

Integrando

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \qquad |x| < 1$$

Possiamo utilizzare il risultato per integrare per serie alcune funzioni non integrabili elementarmente. Per $a > 0$ calcoliamo

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} d\,x = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} a^{2n+1}.$$

Introduciamo la funzione degli errori introdotta da Gauss

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} t^{2n} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Esercizio 1.

$$\int_0^2 t^2 e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^2 t^{n+2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{2^{n+3}}{n+3}.$$

3.2 Serie di Taylor

Data una funzione $f \in C^\infty(x_0 - r, x_0 + r)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

si dice serie di Taylor relativa al punto x_0. Se vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \qquad |x - x_0| < r,$$

la funzione f si dice sviluppabile in serie di Taylor per x: $|x - x_0| < r$.

Il seguente esempio mostra che che esistono funzioni $f \in C^\infty(-r, r)$ che non sono uguali alla serie di Taylor.

Esempio 3.1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La funzione presenta derivate tutte nulle in $x_0 = 0$, e quindi la serie di Taylor ad essa relativa vale 0 e non coincide con la funzione.

Funzioni analitiche (in senso reale).

Definizione 3.2. *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo con $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$) si dice analitica in senso reale se è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ di x_0. f si dice analitica in I se è analitica in ogni punto di I.*

Ci occupiamo di condizioni di sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor.

Definizione 3.3. *Se f è derivabile $n+1$ volte, il resto dato dalla formula di Taylor*

$$r(x_0, n, x) = r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Sappiamo (resto di Peano) che

$$r(x_0, n, x) = o((x - x_0)^n) \qquad x \to x_0.$$

Ci occupiamo di condizioni per cui

$$r(x_0, n, x) \to 0 \qquad n \to +\infty$$

3.3 Resto Integrale e di Lagrange

Deduciamo ora altre espressioni del resto

Teorema 3.4. *Se f è derivabile $n+1$ volte, il resto si può esprimere*

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x - t)^n dt$$

Dimostrazione. La dimostrazione del risultato segue il principio di induzione. Per $n = 0$ il risultato segue da

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Assumiamo vera l'affermazione al passo $n-1$. Il resto al passo $n-1$ si esprime

$$r_{n-1}(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Si ha

$$\begin{aligned} r_{n-1}(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt &= \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n} \right]' dt = \\ -\left[\frac{(x-t)^n}{n!} f^n(t) \right]_{x_0}^{x} &+ \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \\ = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) &+ \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \end{aligned}$$

In conclusione

$$r(x_0, n-1, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

e quindi

$$r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) =$$

$$\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

□

Dalla formula del resto integrale si deduce la formula del resto di Lagrange.

Teorema 3.5. *Se f è derivabile $n+1$ volte in un intervallo I e x, x_0 sono punti di I, esiste un punto ξ compreso tra x e x_0 tale che*

$$r_n(x_0, x) = f^{n+1}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

Dimostrazione.

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt =$$

Assumiamo $x > x_0$. In $[x_0, x]$ si ha

$$m \leq f^{n+1}(t) \leq M,$$

essendo

$$m = \min_{[x_0,x]} f^{n+1}(t) \qquad M = \max_{[x_0,x]} f^{n+1}(t).$$

Abbiamo

$$m\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ossia

$$m \leq \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq M$$

Dal teorema dei valori intermedi applicato a f^{n+1}, si ha che esiste ξ per cui

$$f^{n+1}(\xi) = \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

da cui la tesi. □

4 03.10 Sviluppi in serie di Taylor di alcune funzioni, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $\arctan x$. Serie di potenze complesse, formula di Eulero, funzioni complesse e^z, $\sin z$, $\cos z$,$\sinh z$, $\cosh z$

4.1 Condizioni di convergenza

Teorema 4.1. *Se la funzione f è derivabile infinite volte in un intervallo (a, b) e se esistono due numeri reali L e M tali che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq ML^n \qquad \forall x \in (a, b) \quad \forall n,$$

allora per ogni $x_0 \in (a, b)$ la funzione è sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0.

La dimostrazione è basata sull'analisi del resto.

Esempi di funzioni analitiche in $\mathbb{R}$: e^x, $\sin x$, $\cos x$.

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

La dimostrazione segue dall'espressione del resto di Lagrange.

Esercizio 1.

$$e^{x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{n!}\,.$$

Esercizio 2.

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n-1}\,.$$

4.2 Serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$z^k = (x+iy)^k$$

La serie geometrica (per $|z| < 1$)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k.$$

La serie di potenza in $\mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

Definiamo l'esponenziale complesso

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Una funzione f definita su un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ è analitica se è rappresentabile localmente come una serie di potenze: ogni numero $x_0 \in A$ ha un intorno aperto $A' \subset A$, tale che esiste una serie di potenze con centro x_0 che converge a $f(x)$ per ogni $x \in A'$.

Ogni serie di potenze con raggio di convergenza positivo fornisce una funzione analitica sull'interno della sua regione di convergenza. Ogni funzione olomorfa (derivabile in senso complesso, vedremo più avanti) è una funzione analitica complessa.

Le formula di Eulero: per $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Per $z \in \mathbb{C}$ definiamo

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

$$\cos hz = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$$\sin hz = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

Esercizi.

5 05.10 Funzioni trigonometriche. Esercizi. Ortogonalità delle funzioni trigonometriche. Sistema ortonormale

5.1 Esercizi:La formula del Binomio e la Formula di Eulero

Le formula di Eulero: per $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria.

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Ricordiamo la

Formula di triplicazione

$$\cos 3x + i\sin 3x = (e^{ix})^3 = (\cos x + i\sin x)^3 =$$

$$= \cos^3 x - i\sin^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\sin^2 x\cos x.$$

Uguagliando la parte reale e la parte immaginaria dei due numeri

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x$$

$$\sin(3x) = -\sin^3 x + 3\cos^2 x\sin x$$

Più in generale si ha

Proposizione 2. *Si ha*

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione.

$$\cos(nx) = \left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right) = \left(\frac{(e^{ix})^n+(e^{-ix})^n}{2}\right) =$$

$$\frac{(\cos x + i\sin x)^n + (\cos x - i\sin x)^n}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\cos^k x (i \sin x)^{n-k} + \cos^k x (-i \sin x)^{n-k}}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(i)^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i\pi}{2}})^{n-k} + (e^{\frac{-i\pi}{2}})^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i(n-k)\pi}{2}}) + (e^{\frac{-i(n-k)\pi}{2}})}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x$$

□

Esercizio 5.1. *Dalla formula di Eulero, $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria $i^2 = -1$.*

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

ricavare

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π

Proposizione 3. *Si ha*

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{-\cos(n+\frac{1}{2})x + \cos\frac{x}{2}}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

e

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{x}{2})} + \frac{1}{2}$$

5.2 Ortonormalità

Per $n = 1, 2, \ldots;\quad m = 1, 2, \ldots$ risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\sin(nx)dx = \delta_{m,n}; \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx = \delta_{m,n}$$

$\delta_{m,n}$ è il simbolo di Kronecker

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

Identità di Weber per $n, m \in \mathbb{N}$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\big((\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\big)$$
$$\sin(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\big((\sin((n-m)x) + \sin((n+m)x)\big)$$
$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\big((\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)\big)$$

6 06/10 Esercizi

Esercizio 1. Per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$1) \ \frac{d}{dz}\sin z = \cos z$$
$$2) \ \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$$

$\boxed{\text{a}}$ vera	$\boxed{\text{b}}$ la prima è vera e la seconda è falsa
$\boxed{\text{c}}$ la seconda è vera e la prima è falsa	$\boxed{\text{d}}$ entrambe false

Esercizio 2.
Per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$1) \ \sin(-z) = -\sin z$$
$$2) \ \cos(-z) = \cos(z)$$

$\boxed{\text{a}}$ vera	$\boxed{\text{b}}$ la prima è vera e la seconda è falsa
$\boxed{\text{c}}$ la seconda è vera e la prima è falsa	$\boxed{\text{d}}$ entrambe false

Esercizio 3. Sia $z \in \mathbb{C}$. Allora

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio 4. Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!}$$

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio 5.
Per ogni $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &1)\ \ \sin(iy) = i \sinh y \\ &2)\ \ \cos(iy) = i \sinh y \end{aligned}$$

$\boxed{\text{a}}$ vera $\boxed{\text{b}}$ la prima è vera e la seconda è falsa

$\boxed{\text{c}}$ la seconda è vera e la prima è falsa $\boxed{\text{d}}$ entrambe false

Esercizio 6.
Per ogni $z = x + iy \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &1)\ \ |\sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y) \\ &2)\ \ |\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{a}}$ vera $\boxed{\text{b}}$ la prima è vera e la seconda è falsa

$\boxed{\text{c}}$ la seconda è vera e la prima è falsa $\boxed{\text{d}}$ entrambe false

Soluzione Esercizi
Esercizio 1. A Vere entrambe. Infatti

$$\frac{d}{dz} \sin z = \frac{1}{2i} \frac{d}{dz}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i} i((e^{iz} + e^{-iz})) = \cos z\,.$$

La seconda si dimostra in modo analogo.

Esercizio 2. A Vere entrambe. Infatti

$$\sin(-z) = \frac{1}{2i}(e^{-iz} - e^{iz}) = -\sin z\,.$$

La seconda si dimostra in modo analogo.

Esercizio 3. A Vero. Infatti $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$ é vera segue dall'espressione di $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ e $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

Esercizio 4. B Falsa. Infatti

$$\cosh x = \sum_{n=0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Esercizio 5. B La prima é vera la seconda é falsa. Infatti

$$\sin iy = \frac{1}{2i}(e^{i^2 y} - e^{-i^2 y}) = \frac{-1}{i}\sinh y = i\sinh y\,.$$

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^{i^2 y} + e^{-i^2 y}) = \cosh y\,.$$

Esercizio 6. A Vera.
Poiché, utilizzando l'esercizio precedente,

$$\sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y\,,$$
$$\cos(x+iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}|\sin(x+iy)|^2 = (\sin x\cosh y)^2 + (\cos x\sinh y)^2 &= (\sin x)^2(1+\sinh^2 x) + (\cos x\sinh y)^2 \\ &= \sin^2 x + ((\sin x)^2 + (\cos x)^2)\sinh^2 x\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\cos(x+iy)|^2 = (\cos x\cosh y)^2 + (\sin x\sinh y)^2 &= (\cos x)^2(1+\sinh^2 x) + (\sin x\sinh y)^2 \\ &= \cos^2 x + ((\sin x)^2 + (\cos x)^2)\sinh^2 x\,.\end{aligned}$$

7 10.10 Funzioni complesse. Logaritmo complesso. Funzioni di due variabili reali. Derivate parziali: definizione e calcolo

7.1 Logaritmo complesso.

Possiamo dare la definizione di logaritmo di un numero complesso $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Sia $z \neq 0$. $\ln z$ sono quei numeri $\omega = x + iy$ tali $e^{\omega} = z$.

Si ricava

$$e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \iff x = \ln r \quad y = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto ogni numero complesso non nullo ha infiniti logaritmi

$$\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

Logaritmo principale

$$\arg z \in (-\pi, \pi], \quad k = 0$$

Possiamo ora definire z^{α} con α reale o complesso.

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z}$$

esempio:

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i(i(\arg i + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$$

Tutti i valori sono numeri reali.

7.2 Derivate parziali prime

Data una funzione f definita in un intorno di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, f si dice derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Il valore del limite si indica con $f_x(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a x della funzione in (x_0, y_0).
f si dice derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

I valore del limite si indica con $f_y(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a y della funzione in (x_0, y_0).
f si dice derivabile parzialmente rispetto a x o rispetto a y in un aperto A se è derivabile parzialmente in ogni punto di A.

7.2.1 Esercizio.

Calcolare f_x f_y ove definite

$$f(x, y) = x + y$$
$$f(x, y) = xy$$
$$f(x, y) = \frac{x}{y}$$
$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$
$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + 4)}$$
$$f(x, y) = \sin(xy)$$
$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(xy)$$
$$f(x, y) = \ln(xy)$$
$$f(x, y) = \ln(x + y)$$
$$f(x, y) = \pi^{xy}$$

8 12.10 Funzioni complesse. Funzioni derivabili in senso complesso. Condizioni di Cauchy-Riemann

8.0.2 Derivata di funzioni complesse.

Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se esiste finito il limite del rapporto incrementale (inteso come quoziente di numeri complessi)

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

dove il rapporto si può scrivere:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$i\frac{v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}$$

Assumiamo ora che la $f(z)=u(x,y)+iw(x,y)$ sia derivabile in $\mathbb{C}$. Sia $z_0\in\mathbb{C}$.

$$(\Delta x,0)\to(0,0)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+i\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

$$(0,\Delta y)\to(0,0)$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+i\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y}+i\frac{v(x_0,y_0+i\Delta y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y}=\frac{u_y(x_0,y_0)}{i}+v_y(x_0,y_0)$$

Uguagliando i limiti, deduciamo le Condizioni di Cauchy- Riemann

$$\begin{cases}u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)\end{cases}$$

Vale il viceversa

Siano $u(x,y)$ e $v(x,y)$ due funzioni di classe C^1. Definiamo

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Se u ev soddisfano le condizioni di Cauchy Riemann allora f è derivabile.

Esempio di funzione olomorfa in $\mathbb{C}$: $f(z)=e^z$, $f(z)=\cos z$, $f(z)=\sin z$, $f(z)=z^n$

$$D(z^n)=nz^{n-1},\ n\in\mathbb{N},\ D(e^z)=e^z,\ \ D(\cos z)=-\sin z,\ \ D(\sin z)=\cos z$$

Esempio

$$e^z=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$u(x,y)=e^x\cos y$$

$$v(x,y)=e^x\sin y$$

$$u_x=e^x\cos y=v_y$$

$$u_y=-e^x\sin y=-v_x$$

La funzione $f(z)=\overline{z}$ non è olomorfa in $\mathbb{C}$. Infatti non sono verificate le condizioni di Cauchy-Riemann.

Da

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0),$$

ricavare la derivata complessa delle funzioni elementari.

$$D(e^z)=e^z,\ \ D(\cos z)=-\sin z,\ D(\sin z)=\cos z$$

9 13.10 Serie di Fourier. Definizione e calcolo dei coefficienti.

9.1 Polinomi trigonometrici

Un polinomio trigonometrico è una combinazione lineare finita di funzioni $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ e per alcuni valori di interi positivi. E' una funzione periodica di periodo 2π.

$$s_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

9.1.1 Funzioni periodiche

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T > 0$ se

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il più piccolo numero T (se esiste) si dice periodo minimo.

E' interessante osservare l'invariata per traslazione dell'integrale di una funzione periodica

$$\int_0^T f(x+y)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Cominciamo con l'osservare la seguente proprietà. Per ogni numero reale a

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Infatti

$$\int_0^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{a+T} f(x)dx$$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = \int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x+T)dx$$

Si ha

$$\int_0^a f(x+T)dx = \int_T^{a+T} f(x)dx$$

Ne consegue

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

In più

$$\int_0^T f(x+y)dx = \int_y^{T+y} f(t)dt = \int_0^T f(x)dx$$

9.2 Serie di Fourier

Supponiamo che la successione di somme parziali $s_n(x)$ converga per ogni $x \in R$. Otteniamo la serie trigonometrica di coefficienti a_0, a_k, b_k.

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Data una funzione f periodica di periodo 2π ci chiediamo se essa sia sviluppabile in una serie trigonometrica ossia se si possono determinare i coefficienti a_0 a_k b_k in modo che la serie converga ed abbia come somma $f(x)$.

Moltiplicando $f(x)$ per $\cos(mx)$ e $\sin(mx)$ ed integrando tra $-\pi, \pi$ si ottiene

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

Le successioni (a_m) e (b_m) sopra definite si chiamano coefficienti di Fourier di $f(x)$. La serie, una volta specificati i coefficienti, si chiama serie di Fourier di $f(x)$.

Funzioni pari:

$$b_k = 0 \qquad a_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

Funzioni dispari:

$$a_k = 0 \qquad b_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

9.3 Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

prolungata per periodicità I coefficienti di Fourier sono $a_0 = 1$, $a_k = 0$ $b_k = \frac{1-(-1)^k}{k\pi}$ La serie di Fourier è data da

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = |x|x,$$

per $x \in [-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità in $\mathbb{R}$ determinare le serie di Fourier.

La funzione è dispari, pertanto $a_0 = 0$, $a_k = 0, \forall k \in N$.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} -x^2 \sin kx dx + \int_{0}^{\pi} x^2 \sin kx dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[- \int_{\pi}^{0} -x^2 \sin k(-x) dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx \Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx \Big] = \frac{2}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx \Big].$$

Risulta:

$$\int x^2 \sin kx dx = - \int x^2 \frac{1}{k} (\cos kx)' dx =$$

$$-\frac{1}{k} x^2 (\cos kx) + \frac{2}{k} \int x \cos kx dx =$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx = -\frac{1}{k} x^2 (\cos kx)|_0^{\pi} + \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \cos kx dx =$$

$$= -\frac{1}{k}\pi^2 (-1)^k + \frac{2}{k^2} \int_0^{\pi} x (\sin kx)' dx =$$

$$= -\frac{1}{k}\pi^2 (-1)^k + (\frac{2}{k^3}(-1)^k - \frac{2}{k^3})$$

Quindi indicata S_2 la serie di Fourier relativa a f, si ha

$$S_2 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(-\frac{1}{k}\pi^2 (-1)^k + \frac{2}{k^3}(-1)^k - \frac{2}{k^3} \Big) \sin kx.$$

Esercizio 2 Sia c un parametro reale positivo e f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$x \in (-\pi, \pi] \to e^{\max\{\frac{1}{\pi}, c\}x}$$

Determinare la serie di Fourier di f .

Se $c > \frac{1}{\pi}$, risulta $f(x) = e^{cx}$, pertanto la serie vale:

$$\frac{\sinh c\pi}{\pi c} + \frac{2}{\pi} \sinh c\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + c^2} (c \cos kx - k \sin kx).$$

Se $c \leq \frac{1}{\pi}$, risulta $f(x) = e^{\frac{1}{\pi}x}$, dunque la serie vale:

$$\sinh 1 + \frac{2}{\pi} \sinh 1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + (1/\pi^2)} (\frac{1}{\pi} \cos kx - k \sin kx).$$

Esercizio 3 Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ -3x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

Determinare la serie di Fourier di f .

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx) \right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{sen}(kx) dx, k = 0, 1, 2, ...$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier della f.

$$a_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 3x dx = -\frac{3}{2}\pi;$$

$$a_k = -\frac{3}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = -\frac{3}{\pi} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2} \right];$$

$$b_k = -\frac{3}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx = -\frac{3}{k}(-1)^{k+1} = \frac{3}{k}(-1)^k.$$

la serie di Fourier richiesta è:

$$-\frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(kx)}{k}.$$

Esercizio 4 Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \max\{2, 2-x\}, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

Determinare la serie di Fourier di f.

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx) \right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{sen}(kx) dx, k = 0, 1, 2, ...$$

Osserviamo che:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \in (-\pi, 0) \\ 2, & x \in [0, \pi] \end{cases} .$$

Dunque:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2dx = \frac{\pi}{2} + 4.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)\cos(kx)dx + \int_{0}^{\pi} 2\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1].$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)\text{sen}(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\text{sen}(kx)dx = \frac{1}{k}(-1)^k.$$

La serie di Fourier richiesta è:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+4\right) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]\cos(kx) + \frac{1}{k}(-1)^k\text{sen}(kx)\right].$$

Ricordiamo: se f è pari allora $b_k = 0$, $\forall k$; se f è dispari allora $a_k = 0$, $\forall k$; inoltre per la 2π periodicità della funzione f vale

$$\int_{-\pi-a}^{\pi-a} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

per ogni a numero reale.

9.4 Esercizio. Calcolare la serie di Fourier per l'onda quadra, l'onda a dente di sega, l'onda triangolare.

9.5 Esercizio.

Data

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad -L \le x \le L$$

Dimostrare

$$\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = L\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

Dim.

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty} a_n a_m \int_{-L}^{L}\left(\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx =$$

$$y = \frac{\pi x}{L}, \;\; dy = \frac{\pi dx}{L}$$

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty} a_n a_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin ny \sin my \;\; dy = L\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

10 17.10 Disuguaglianza di Bessel. Nucleo di Dirichlet

L' identità di Parseval è un importante risultato che riguarda la sommabilità della serie di Fourier di una funzione. L'identità di Parseval stabilisce che la somma dei quadrati dei coefficienti di Fourier di una funzione è pari all'integrale del quadrato della funzione:

Un caso particolare (assumeremo che siano valide ipotesi sulla funzione che ci permettano di fare il calcolo)

Data

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

con b_n reale, si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n,m=1}^{+\infty} b_n b_m \sin nx \sin mx \quad dy =$$

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty} b_n b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$$

Da cui

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$$

10.1 Disuguaglianza di Bessel

Lemma 10.1. *Sia*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx) \right],$$

allora

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right)$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx) \right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)dx, k = 1, 2, ...n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(kx)dx, k = 1, 2, ...n$$

Allora calcoliamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x)dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)+b_k\mathrm{sen}(kx)\right)\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n} a_n\cos(nx)+b_n\mathrm{sen}(nx)\right)dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n} a_n\cos(nx)+b_n\mathrm{sen}(nx)\right)dx+$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)\right)\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n} a_n\cos(nx)+b_n\mathrm{sen}(nx)\right)dx+$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(b_k\mathrm{sen}(kx)\right)+\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n} a_n\cos(nx)+b_n\mathrm{sen}(nx)\right)dx =$$

$$\pi\frac{a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

Ne risulta

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

□

Lemma 10.2. *Sia*

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(kx)+b_k\mathrm{sen}(kx)\right],$$

allora

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n f(x)dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

Dal precedente risultato segue

$$0\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-s_n(x))^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right),$$

quindi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\ge\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

Per $n\to+\infty$ otteniamo la Disuguaglianza di Bessel

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\ge\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

Inoltre, come corollario,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx<+\infty,\quad\Longrightarrow$$

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} b_k = 0,$$

ossia

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen}(kx)dx = 0.$$

10.2 Nucleo di Dirichlet

$$d_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

Si ha

$$d_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2}))}$$

Infatti sommiamo da 1 a n i due membri dell'identità trigonometrica

$$\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(kx)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x)) = \sin((n+\frac{1}{2})x) - \sin(\frac{x}{2})$$

Inoltre

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d_n(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Segue da $d_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$ ed effettuando l'integrazione.

10.3 Formula di Dirichlet

Teorema 10.3. *Sia f periodica di periodo 2π integrabile in $[-\pi,\pi]$. La somma parziale $s_n(x)$ della serie di Fourier di f si può esprimere in termini del nucleo di Dirichlet (integrale di convoluzione)*

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)d_n(t)dt,$$

ove

$$d_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

La dimostrazione è basata sul seguente calcolo. Per definizione di $s_n(x)$

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(kx)\cos(ky) + \sin(kx)\sin(ky))dy] =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(k(x-y))]dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(kt)]dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}dt$$

11 19.10 Teorema di Convergenza Puntuale

Definizione 11.1. *Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diciamo che f è regolare a tratti in $[a, b]$ se esistono un numero finito di punti x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ con $a_0 = x_0 = x_1 < x_1 < x_2 \cdots < x_N = b$ tali che f è derivabile con derivata continua in ogni intervallo (x_i, x_{i+1}), e la restrizione di f' a (x_i, x_{i+1}) è prolungabile con continuità in $[x_i, x_{i+1}]$. Se la funzione f è definita su $\mathbb{R}$, allora diciamo f è regolare a tratti in $\mathbb{R}$ se è regolare a tratti in ogni intervallo [a,b] contenuto in $\mathbb{R}$.*

Convergenza Puntuale Per ogni x reale la successione $s_n(x)$ converge a $f(x)$. ovvero perogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice $N(x.\epsilon)$ the che

$$|s_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall N > N(x, \epsilon)$$

Teorema 11.2. *Sia f una funzione periodica regolare a tratti su $\mathbb{R}$. Per ogni x reale la serie di Fourier converge alla media aritmetica tra il limite destro e il limite sinistro:*

$$\frac{1}{2}\Big[f(x_+) + f(x_-)\Big],$$

e a $f(x)$ nei punti di continuità.

Dobbiamo considerare

$$s_n(x) - \frac{1}{2}\Big[f(x_+) + f(x_-)\Big] = \frac{1}{\pi}[\int_0^\pi (f(x+t) - f(x_+))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt +$$
$$\int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x_-))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{x}{2})}dt,$$

Poniamo

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)-f(x_+)}{2\sin(\frac{t}{2})} & 0 < t \leq \pi \\ 0 & t = 0 \\ \frac{f(x+t)-f(x_-)}{2\sin(\frac{t}{2})} & -\pi < t \leq 0 \end{cases}$$

Ne segue dalle ipotesi su f che esiste il limite per $t \to 0^+$ e per $t \to 0^-$ di F. Infatti

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = f'_+(x) \qquad \lim_{t\to 0^-} F(t) = f'_-(x)$$

F è continua a tratti in $[-\pi, \pi]$, dunque integrabile e limitata. Inoltre

$$s_n(x) - \frac{1}{2}\Big[f(x_+) + f(x_-)\Big] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt.$$

Del resto

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos\frac{t}{2}\sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin\frac{t}{2}\cos(nt)dt$$

Dalla disuguaglianza di Bessel si deduce che

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin\frac{t}{2}\cos(nt)dt \to 0$$

per $n \to +\infty$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos\frac{t}{2}\sin(nt)dt \to 0$$

per $n \to +\infty$.

In conclusione

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt \to 0,$$

per $n \to +\infty$.

11.1 Serie di Fourier in forma complessa

Data

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt} = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k\cos(kx) + i\gamma_k\sin(kx)) + \gamma_{-k}\cos(-kx) + i\gamma_k\sin(-kx)) =$$

$$\gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k + \gamma_{-k})\cos(kx) + i(\gamma_k - \gamma_{-k})\sin(kx)$$

$$\gamma_0 = a_0/2$$

$$\gamma_k + \gamma_{-k} = a_k$$

$$i(\gamma_k - \gamma_{-k}) = b_k$$

e

$$\gamma_k + \gamma_{-k} = a_k$$

$$\gamma_k - \gamma_{-k} = -ib_k$$

Sommando

$$\gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

Sottraendo

$$\gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

E' utile scrivere la serie di Fourier nella forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

Risulta per $n \neq m$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

In conclusione

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \delta_{n,m}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

11.2 Serie di Fourier per funzioni periodiche di periodo $T \neq 2\pi$.

Sia f periodica di periodo $L \neq 2\pi$. Consideriamo $\tilde{f}(y) = f(\frac{Ly}{2\pi})$, allora $\tilde{f}$ è periodica di periodo 2π.

La serie di Fourier di $\tilde{f}$ è data da

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(ky) + b_k \sin(ky)$$

La serie di Fourier di f risulta ($x := \frac{Ly}{2\pi}$)

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{2k\pi}{L}x) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{L}x)$$

i cui coefficienti sono

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y)\cos(ky)dy = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos(\frac{2k\pi}{L}x)dx$$

$k = 0, 1 \ldots$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y)\sin(ky)dy = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin(\frac{2k\pi}{L}x)dx$$

$k = 1 \ldots$

12 20.10 Esercizi

Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ -3x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$-\frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k \sin(kx)}{k}.$$

Poichè f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ distinti da $\pi+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier la serie converge ad f in tali punti. Notiamo che, se $x=\pi$, la serie si riduce a :

$$-\frac{3\pi}{4}-\frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Poiché

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{1}{8}\pi^2,$$

questa somma vale:

$$\frac{f(\pi_+)+f(\pi_-)}{2}=-\frac{3\pi}{2}.$$

Esercizio 1. Sia α un numero reale positivo. Determinare, al variare di α, il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Esercizio 2. Sia $x \in \mathbb{R}$, e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Allora se f è pari e g è dispari $f+g$ è dispari

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\qquad\qquad$ $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio 3. Sia $x \in \mathbb{R}$, e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Allora se f è dispari e g è dispari fg è dispari

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\qquad\qquad$ $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio 4. Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione

$$f(x)=\cosh x^2.$$

Esercizio 5. Scrivere la serie di Fourier della funzione $f(x)=0$ in $[-\pi,0)$ e $f(x)=1$ in $[0,\pi)$ ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$

Esercizio 6. Scrivere la serie di Fourier della funzione $f(x)=x$ in $[-\pi,\pi)$ ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$

Esercizio 7. Vale

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{(2k-1)^2}$$

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\qquad\qquad$ $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio 8. Vale

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}$$

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\qquad\qquad$ $\boxed{\text{b}}$ Falso