1 26.09 - Introduzione al corso. Richiami sulle serie geometriche. Serie di potenze. Intervallo di convergenza, raggio di convergenza. Esempi.

1.1 La Serie geometrica

Consideriamo serie geometrica di ragione x

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ridotta n-sima

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

.

Se $x = 1$ si ha

$$s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Sia $x \neq 1$. Si ha

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Se $|x| < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Se $x > 1$, poichè $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \cdot \lim_{n\to\infty} x^n - \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

Sia ora $x = -1$,

$$s_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2p \\ 1 & , \quad n = 2p + 1 \end{cases}$$

Pertanto la successione $(s_n)_{\mathbb{N}}$ non è regolare.
Sia infine $x < -1$. Possiamo scrivere $x = -|x|$, e quindi

$$\begin{aligned} s_n = \frac{1 - (-|x|)^n}{1 + |x|} &= \frac{1 - (-1)^n |x|^n}{1 + |x|} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1 - |x|^{2p}}{1 + |x|}, & n = 2p \\ \dfrac{1 + |x|^{2p-1}}{1 + |x|}, & n = 2p - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ne segue che $S_{2p} \to -\infty$ e $S_{2p-1} \to +\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{n\to\infty} s_n$
Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1 - x} & x \in (-1, 1) \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

1.2 Definizione e prime proprietà

La Serie geometrica costituisce un caso particolare di serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

quando $a_n = 1 \quad n = 0, 1, \ldots\ldots \quad$ e $x_0 = 0$.
In generale i coefficienti a_n costituiscono una successione di numeri reali.
Con una traslazione $y = x - x_0$ possiamo ricondurci al caso $x_0 = 0$
Infatti supponiamo di dover studiare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - 1)^n$$

Si pone $y = x - 1$ e si studia

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n,$$

che sappiamo essere convergente per $|y| < 1$.

$$|y| < 1 \iff |x - 1| < 1 \iff -1 < x - 1 < 1 \iff 0 < x < 2$$

Concentriamo la nostra analisi sul ruolo dei coefficienti a_n. Osserviamo di aver incontrato già le serie di potenze con nello studio delle serie numeriche (oltre le serie geometriche). Facciamo alcuni esempi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. Il caso $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie diverge (serie armonica), per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge è dato da $(-1, 1) \cup \{-1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie converge, per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge è dato da $(-1, 1) \cup \{-1, 1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per ogni x reale.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge solo per $x = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < \frac{1}{3}$. $|x| = \frac{1}{3}$ deve essere studiato separatamente per $x = \frac{1}{3}$ la serie diverge, per $x = -\frac{1}{3}$ la serie è indeterminata.

Vediamo negli esempi che l'insieme di convergenza è un intervallo, l'analisi nei punti di estremo dell'intervallo varia da caso a caso. Il raggio di convergenza è la metà della lunghezza di tale intervallo.

Osserviamo che questa definizione è estendibile al caso complesso. Sia $z \in \mathbb{C}$. Ripartendo dalla serie geometrica e ricordando che

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} \text{ è il modulo di } z.$$

abbiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge se $|z| < 1$. Nel piano complesso $(\Re z, \Im z)$ l'insieme $\sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} < 1$ individua il cerchio di centro 0 e raggio 1 privato della circonferenza. Il raggio di convergenza (in questo caso si ha perfetta corrispondenza con l'immagine grafica) è 1.

Dimostriamo ora che l'intuizione maturata sulla struttura dell'insieme di convergenza corrisponde a un risultato matematico.

Proposizione 1. *Se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge in un punto x_1 allora converge (assolutamente) in ogni punto x tale che $|x| < |x_1|$.

Dimostrazione. Sappiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

converge. Assumiamo $x_1 \neq 0$. Ne segue dalla condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n \to +\infty} a_n x_1^n = 0,$$

ne segue che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per $n > N$

$$|a_n x_1^n| < 1.$$

Allora per $n > N$

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x^n}{x_1^n} \right| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

Quindi tenuto conto che $|a_n x_1^n| < 1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

L'ultima serie converge se $|x| < |x_1|$. □

2 28.09 Il criterio della radice e del rapporto per serie di potenze. Esempi di applicazione. Equazioni differenziali e serie di potenze. Calcolo dei coefficienti. Equazione di Bessel di ordine zero.

2.0.1 Criteri per la determinazione del raggio di convergenza

Teorema 2.1. *(Criterio di Cauchy) Se esiste il limite (anche $+\infty$)*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}$$

Teorema 2.2. *(Criterio di D'Alembert) Sia $a_n \neq 0$, per ogni n. Se esiste il limite (anche $+\infty$)*

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}.$$

Se $l = +\infty$ allora $r = 0$, se $l = 0$ allora $r = +\infty$

Esercizio 2.3. *Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{x}{3} \right)^n.$$

Risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{x}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{3} \right)^n x^n$$

Calcoliamo

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{n}).$$

Ne segue $l = \frac{1}{3}$ e $r = 3$

Ricapitolando: data la serie di potenze, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ determiniamo il raggio di convergenza r (i criteri non fanno intervenire x). Allora la serie converge assolutamente per $|x| < r$, non converge per $|x| > r$, in generale nulla si può dire per $|x| = r$.

Ricapitolando

Teorema 2.4. *Data la serie di potenze si verifica sempre uno dei seguenti casi*

- *la serie converge per* $x = 0$
- *la serie converge per ogni* x *reale*
- *la serie converge per* $|x| < r$ *e non converge per* $|x| > r$

2.1 Serie lacunari

Una serie di potenze che abbia infiniti coefficienti nulli si chiama serie lacunare. Un esempio di serie lacunare è il seguente

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2n}.$$

Anche se possiamo stabilire il raggio di convergenza della serie $r = \sqrt{2}$, tuttavia osserviamo che non possiamo applicare il criterio della radice o il criterio del rapporto in quanto possiamo individuare due sottosuccessioni (date dagli indici pari e dagli indici dispari) che convergono a limiti distinti.

2.2 Serie di Potenze ed equazione di Bessel di ordine zero

Illustriamo il Metodo di Frobenius per illustrare come determinare la soluzione dell'equazione di Bessel di ordine 0.

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, \qquad x > 0$$

Ricordiamo le equazioni di Bessel di ordine n

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0, \qquad x > 0$$

Aggiungiamo la condizione in $x = 0$, $y(0) = 1$,

$$y'(x) = -xy''(x) - xy(x), \qquad y'(0) = 0$$

Ricapitolando vogliamo risolvere

$$\begin{cases} xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, & x > 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Assumiamo che la soluzione sia esprimibile in serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dalla condizione $y(0) = 1$ si ricava $a_0 = 1$. Dunque

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} x^{m+1}$$

Calcoliamo i singoli termini

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y'(x) = a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \qquad xy''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+1}$$

Sostituendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+1} + a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Riordinando

$$a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + (n+2)^2 a_{n+2} \right) x^{n+1} = 0.$$

Ricaviamo $a_0 = 1, \quad a_1 = 0$.

$$a_n + (n+2)^2 a_{n+2} = 0 \qquad a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2} a_n$$

Se n è dispari $a_n = 0$, se n è pari allora $n = 2k$ $k \in \mathbb{N}$

$$a_{2(k+1)} = -\frac{1}{2^2 (k+1)^2} a_{2k}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2^2} a_0 = -\frac{1}{2^2}$$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} a_0 = \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^4}$$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} a_4 = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^4} = -\frac{1}{2^6} \frac{1}{(3!)^2}$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 0, \\ a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2}, \end{cases}$$

Otteniamo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \frac{x^{2n}}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n}$$

funzione di Bessel di ordine 0.

3 29.09 Serie di Potenze: Integrale e Derivata. Serie di Taylor. Resto integrale e di Lagrange.

3.1 Serie di Potenze: Integrale e Derivata

3.1.1 Derivazione termine a termine

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < r.$$

La serie derivata

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (applicare il criterio di D'Alembert), la somma $f(x)$ è derivabile e vale

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad |x| < r.$$

Vediamo un'applicazione del risultato.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

3.1.2 Integrazione termine a termine

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < r.$$

Si ha

$$\int_0^x f(s) ds = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x| < r$$

Utilizziamo questo risultato.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad |x| < 1,$$

Integrando

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \qquad |x| < 1$$

Possiamo utilizzare il risultato per integrare per serie alcune funzioni non integrabili elementarmente. Per $a > 0$ calcoliamo

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} d\,x = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} a^{2n+1}.$$

Introduciamo la funzione degli errori introdotta da Gauss

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} t^{2n} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Esercizio 1.

$$\int_0^2 t^2 e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^2 t^{n+2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{2^{n+3}}{n+3}.$$

3.2 Serie di Taylor

Data una funzione $f \in C^\infty(x_0 - r, x_0 + r)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

si dice serie di Taylor relativa al punto x_0. Se vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \qquad |x - x_0| < r,$$

la funzione f si dice sviluppabile in serie di Taylor per x: $|x - x_0| < r$.

Il seguente esempio mostra che che esistono funzioni $f \in C^\infty(-r, r)$ che non sono uguali alla serie di Taylor.

Esempio 3.1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La funzione presenta derivate tutte nulle in $x_0 = 0$, e quindi la serie di Taylor ad essa relativa vale 0 e non coincide con la funzione.

Funzioni analitiche (in senso reale).

Definizione 3.2. *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo con $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$) si dice analitica in senso reale se è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ di x_0. f si dice analitica in I se è analitica in ogni punto di I.*

Ci occupiamo di condizioni di sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor.

Definizione 3.3. *Se f è derivabile $n+1$ volte, il resto dato dalla formula di Taylor*

$$r(x_0, n, x) = r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Sappiamo (resto di Peano) che

$$r(x_0, n, x) = o((x - x_0)^n) \qquad x \to x_0.$$

Ci occupiamo di condizioni per cui

$$r(x_0, n, x) \to 0 \qquad n \to +\infty$$

3.3 Resto Integrale e di Lagrange

Deduciamo ora altre espressioni del resto

Teorema 3.4. *Se f è derivabile $n+1$ volte, il resto si può esprimere*

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x - t)^n dt$$

Dimostrazione. La dimostrazione del risultato segue il principio di induzione. Per $n = 0$ il risultato segue da

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Assumiamo vera l'affermazione al passo $n-1$. Il resto al passo $n-1$ si esprime

$$r_{n-1}(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Si ha

$$\begin{aligned} r_{n-1}(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1} dt &= \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]' dt = \\ &-\left[\frac{(x-t)^n}{n!}f^n(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \\ &= \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \end{aligned}$$

In conclusione

$$r(x_0, n-1, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

e quindi

$$r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k - \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) =$$

$$\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

□

Dalla formula del resto integrale si deduce la formula del resto di Lagrange.

Teorema 3.5. *Se f è derivabile $n+1$ volte in un intervallo I e x, x_0 sono punti di I, esiste un punto ξ compreso tra x e x_0 tale che*

$$r_n(x_0, x) = f^{n+1}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

Dimostrazione.

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt =$$

Assumiamo $x > x_0$. In $[x_0, x]$ si ha

$$m \leq f^{n+1}(t) \leq M,$$

essendo

$$m = \min_{[x_0,x]} f^{n+1}(t) \qquad M = \max_{[x_0,x]} f^{n+1}(t).$$

Abbiamo

$$m\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ossia

$$m \leq \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq M$$

Dal teorema dei valori intermedi applicato a f^{n+1}, si ha che esiste ξ per cui

$$f^{n+1}(\xi) = \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

da cui la tesi. □

4 03.10 Sviluppi in serie di Taylor di alcune funzioni, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $\arctan x$. Serie di potenze complesse, formula di Eulero, funzioni complesse e^z, $\sin z$, $\cos z$,$\sinh z$, $\cosh z$

4.1 Condizioni di convergenza

Teorema 4.1. *Se la funzione f è derivabile infinite volte in un intervallo (a, b) e se esistono due numeri reali L e M tali che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq ML^n \qquad \forall x \in (a, b) \quad \forall n,$$

allora per ogni $x_0 \in (a, b)$ la funzione è sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0.

La dimostrazione è basata sull'analisi del resto.

Esempi di funzioni analitiche in $\mathbb{R}$: e^x, $\sin x$, $\cos x$.

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

La dimostrazione segue dall'espressione del resto di Lagrange.

Esercizio 1.

$$e^{x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{n!}\,.$$

Esercizio 2.

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n-1}\,.$$

4.2 Serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$z^k = (x+iy)^k$$

La serie geometrica (per $|z|<1$)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k.$$

La serie di potenza in $\mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

Definiamo l'esponenziale complesso

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Una funzione f definita su un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ è analitica se è rappresentabile localmente come una serie di potenze: ogni numero $x_0 \in A$ ha un intorno aperto $A' \subset A$, tale che esiste una serie di potenze con centro x_0 che converge a $f(x)$ per ogni $x \in A'$.

Ogni serie di potenze con raggio di convergenza positivo fornisce una funzione analitica sull'interno della sua regione di convergenza. Ogni funzione olomorfa (derivabile in senso complesso, vedremo più avanti) è una funzione analitica complessa.

Le formula di Eulero: per $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Per $z \in \mathbb{C}$ definiamo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$$\cos hz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\sin hz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Esercizi.

5 05.10 Funzioni trigonometriche. Esercizi. Ortogonalità delle funzioni trigonometriche. Sistema ortonormale

5.1 Esercizi:La formula del Binomio e la Formula di Eulero

Le formula di Eulero: per $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ricordiamo la

Formula di triplicazione

$$\cos 3x + i \sin 3x = (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 =$$

$$= \cos^3 x - i \sin^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \sin^2 x \cos x.$$

Uguagliando la parte reale e la parte immaginaria dei due numeri

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\sin(3x) = -\sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x$$

Più in generale si ha

Proposizione 2. *Si ha*

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione.

$$\cos(nx) = \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) = \left(\frac{(e^{ix})^n + (e^{-ix})^n}{2} \right) =$$

$$\frac{(\cos x + i \sin x)^n + (\cos x - i \sin x)^n}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\cos^k x(i\sin x)^{n-k}+\cos^k x(-i\sin x)^{n-k}}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(i)^{n-k}+(-i)^{n-k}}{2}\cos^k x\sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(e^{\frac{i\pi}{2}})^{n-k}+(e^{\frac{-i\pi}{2}})^{n-k}}{2}\cos^k x\sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(e^{\frac{i(n-k)\pi}{2}})+(e^{\frac{-i(n-k)\pi}{2}})}{2}\cos^k x\sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\frac{(n-k)\pi}{2}\cos^k x\sin^{n-k} x$$

□

Esercizio 5.1. *Dalla formula di Eulero, $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria $i^2 = -1$.*

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},$$

ricavare

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin\frac{(n-k)\pi}{2}\cos^k x\sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π

Proposizione 3. *Si ha*

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \frac{-\cos(n+\frac{1}{2})x+\cos\frac{x}{2}}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

e

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{x}{2})}+\frac{1}{2}$$

5.2 Ortonormalità

Per $n = 1, 2, \ldots;\quad m = 1, 2, \ldots$ risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases}0 & m \neq n\\ \pi & m = n\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases}0 & m \neq n\\ \pi & m = n \neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\sin(nx)dx = \delta_{m,n}; \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx = \delta_{m,n}$$

$\delta_{m,n}$ è il simbolo di Kronecker

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

Identità di Weber per $n, m \in \mathbb{N}$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\big((\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\big)$$
$$\sin(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\big((\sin((n-m)x) + \sin((n+m)x)\big)$$
$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\big((\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)\big)$$

6 06/10 Esercizi

Esercizio 1. Per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$1) \ \frac{d}{dz}\sin z = \cos z$$
$$2) \ \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$$

$\boxed{\text{a}}$ vera

$\boxed{\text{b}}$ la prima è vera e la seconda è falsa

$\boxed{\text{c}}$ la seconda è vera e la prima è falsa

$\boxed{\text{d}}$ entrambe false

Esercizio 2.
Per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$1) \ \sin(-z) = -\sin z$$
$$2) \ \cos(-z) = \cos(z)$$

$\boxed{\text{a}}$ vera

$\boxed{\text{b}}$ la prima è vera e la seconda è falsa

$\boxed{\text{c}}$ la seconda è vera e la prima è falsa

$\boxed{\text{d}}$ entrambe false

Esercizio 3. Sia $z \in \mathbb{C}$. Allora

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio 4. Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!}$$

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio 5.
Per ogni $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1)\ & \sin(iy) = i \sinh y \\ 2)\ & \cos(iy) = i \sinh y \end{aligned}$$

$\boxed{\text{a}}$ vera $\boxed{\text{b}}$ la prima è vera e la seconda è falsa

$\boxed{\text{c}}$ la seconda è vera e la prima è falsa $\boxed{\text{d}}$ entrambe false

Esercizio 6.
Per ogni $z = x + iy \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1)\ & |\sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y) \\ 2)\ & |\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{a}}$ vera $\boxed{\text{b}}$ la prima è vera e la seconda è falsa

$\boxed{\text{c}}$ la seconda è vera e la prima è falsa $\boxed{\text{d}}$ entrambe false

Soluzione Esercizi
Esercizio 1. A Vere entrambe. Infatti

$$\frac{d}{dz} \sin z = \frac{1}{2i} \frac{d}{dz}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i} i((e^{iz} + e^{-iz})) = \cos z \,.$$

La seconda si dimostra in modo analogo.

Esercizio 2. A Vere entrambe. Infatti

$$\sin(-z) = \frac{1}{2i}(e^{-iz} - e^{iz}) = -\sin z \,.$$

La seconda si dimostra in modo analogo.

Esercizio 3. A Vero. Infatti $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$ é vera segue dall'espressione di $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ e $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

Esercizio 4. B Falsa. Infatti

$$\cosh x = \sum_{n=0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Esercizio 5. B La prima é vera la seconda é falsa. Infatti

$$\sin iy = \frac{1}{2i}(e^{i^2y} - e^{-i^2y}) = \frac{-1}{i}\sinh y = i\sinh y\,.$$

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^{i^2y} + e^{-i^2y}) = \cosh y\,.$$

Esercizio 6. A Vera.
Poiché, utilizzando l'esercizio precedente,

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y\,,\\ \cos(x+iy) &= \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y\,.\end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned}|\sin(x+iy)|^2 = (\sin x\cosh y)^2 + (\cos x\sinh y)^2 &= (\sin x)^2(1+\sinh^2 x) + (\cos x\sinh y)^2\\ &= \sin^2 x + ((\sin x)^2 + (\cos x)^2)\sinh^2 x\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\cos(x+iy)|^2 = (\cos x\cosh y)^2 + (\sin x\sinh y)^2 &= (\cos x)^2(1+\sinh^2 x) + (\sin x\sinh y)^2\\ &= \cos^2 x + ((\sin x)^2 + (\cos x)^2)\sinh^2 x\,.\end{aligned}$$

7 10.10 Funzioni complesse. Logaritmo complesso. Funzioni di due variabili reali. Derivate parziali: definizione e calcolo

7.1 Logaritmo complesso.

Possiamo dare la definizione di logaritmo di un numero complesso $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Sia $z \neq 0$. $\ln z$ sono quei numeri $\omega = x + iy$ tali $e^\omega = z$.

Si ricava

$$e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \iff x = \ln r \quad y = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto ogni numero complesso non nullo ha infiniti logaritmi

$$\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

Logaritmo principale

$$\arg z \in (-\pi, \pi], \quad k = 0$$

Possiamo ora definire z^α con α reale o complesso.

$$z^\alpha = e^{\alpha\ln z}$$

esempio:

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i(i(\arg i + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$$

Tutti i valori sono numeri reali.

7.2 Derivate parziali prime

Data una funzione f definita in un intorno di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, f si dice derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Il valore del limite si indica con $f_x(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a x della funzione in (x_0, y_0).
f si dice derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

I valore del limite si indica con $f_y(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a y della funzione in (x_0, y_0).
f si dice derivabile parzialmente rispetto a x o rispetto a y in un aperto A se è derivabile parzialmente in ogni punto di A.

7.2.1 Esercizio.

Calcolare f_x f_y ove definite

$$f(x, y) = x + y$$
$$f(x, y) = xy$$
$$f(x, y) = \frac{x}{y}$$
$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$
$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + 4)}$$
$$f(x, y) = \sin(xy)$$
$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(xy)$$
$$f(x, y) = \ln(xy)$$
$$f(x, y) = \ln(x + y)$$
$$f(x, y) = \pi^{xy}$$

8 12.10 Funzioni complesse. Funzioni derivabili in senso complesso. Condizioni di Cauchy-Riemann

8.0.2 Derivata di funzioni complesse.

Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se esiste finito il limite del rapporto incrementale (inteso come quoziente di numeri complessi)

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

dove il rapporto si può scrivere:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$i\frac{v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}$$

Assumiamo ora che la $f(z)=u(x,y)+iw(x,y)$ sia derivabile in $\mathbb{C}$. Sia $z_0\in\mathbb{C}$.

$$(\Delta x,0)\to(0,0)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+i\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

$$(0,\Delta y)\to(0,0)$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+i\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y}+i\frac{v(x_0,y_0+i\Delta y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y}=\frac{u_y(x_0,y_0)}{i}+v_y(x_0,y_0)$$

Uguagliando i limiti, deduciamo le Condizioni di Cauchy- Riemann

$$\begin{cases}u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)\end{cases}$$

Vale il viceversa

Siano $u(x,y)$ e $v(x,y)$ due funzioni di classe C^1. Definiamo

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Se u ev soddisfano le condizioni di Cauchy Riemann allora f è derivabile.

Esempio di funzione olomorfa in $\mathbb{C}$: $f(z)=e^z$, $f(z)=\cos z$, $f(z)=\sin z$, $f(z)=z^n$

$$D(z^n)=nz^{n-1},\ n\in\mathbb{N},\ D(e^z)=e^z,\ \ D(\cos z)=-\sin z,\ \ D(\sin z)=\cos z$$

Esempio

$$e^z=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$u(x,y)=e^x\cos y$$

$$v(x,y)=e^x\sin y$$

$$u_x=e^x\cos y=v_y$$

$$u_y=-e^x\sin y=-v_x$$

La funzione $f(z)=\overline{z}$ non è olomorfa in $\mathbb{C}$. Infatti non sono verificate le condizioni di Cauchy-Riemann.

Da

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0),$$

ricavare la derivata complessa delle funzioni elementari.

$$D(e^z)=e^z,\ \ D(\cos z)=-\sin z,\ D(\sin z)=\cos z$$

9 13.10 Serie di Fourier. Definizione e calcolo dei coefficienti.

9.1 Polinomi trigonometrici

Un polinomio trigonometrico è una combinazione lineare finita di funzioni $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ e per alcuni valori di interi positivi. E' una funzione periodica di periodo 2π.

$$s_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

9.1.1 Funzioni periodiche

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T > 0$ se

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il più piccolo numero T (se esiste) si dice periodo minimo.

E' interessante osservare l'invariata per traslazione dell'integrale di una funzione periodica

$$\int_0^T f(x+y)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Cominciamo con l'osservare la seguente proprietà. Per ogni numero reale a

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Infatti

$$\int_0^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{a+T} f(x)dx$$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = \int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x+T)dx$$

Si ha

$$\int_0^a f(x+T)dx = \int_T^{a+T} f(x)dx$$

Ne consegue

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

In più

$$\int_0^T f(x+y)dx = \int_y^{T+y} f(t)dt = \int_0^T f(x)dx$$

9.2 Serie di Fourier

Supponiamo che la successione di somme parziali $s_n(x)$ converga per ogni $x \in R$. Otteniamo la serie trigonometrica di coefficienti a_0, a_k, b_k.

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Data una funzione f periodica di periodo 2π ci chiediamo se essa sia sviluppabile in una serie trigonometrica ossia se si possono determinare i coefficienti a_0 a_k b_k in modo che la serie converga ed abbia come somma $f(x)$.

Moltiplicando $f(x)$ per $\cos(mx)$ e $\sin(mx)$ ed integrando tra $-\pi, \pi$ si ottiene

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx$$

Le successioni (a_m) e (b_m) sopra definite si chiamano coefficienti di Fourier di $f(x)$. La serie, una volta specificati i coefficienti, si chiama serie di Fourier di $f(x)$.

Funzioni pari:

$$b_k = 0 \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx$$

Funzioni dispari:

$$a_k = 0 \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx$$

9.3 Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

prolungata per periodicità I coefficienti di Fourier sono $a_0 = 1$, $a_k = 0$ $b_k = \frac{1-(-1)^k}{k\pi}$ La serie di Fourier è data da

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = |x|x,$$

per $x \in [-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità in $\mathbb{R}$ determinare le serie di Fourier.

La funzione è dispari, pertanto $a_0 = 0$, $a_k = 0, \forall k \in N$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x^2 \sin kx dx + \int_{0}^{\pi} x^2 \sin kx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[-\int_{\pi}^{0} -x^2 \sin k(-x) dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx \Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx \Big] = \frac{2}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx \Big].$$

Risulta:

$$\int x^2 \sin kx dx = -\int x^2 \frac{1}{k} (\cos kx)' dx =$$

$$-\frac{1}{k} x^2 (\cos kx) + \frac{2}{k} \int x \cos kx dx =$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx = -\frac{1}{k} x^2 (\cos kx)|_0^{\pi} + \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \cos kx dx =$$

$$= -\frac{1}{k}\pi^2 (-1)^k + \frac{2}{k^2} \int_0^{\pi} x (\sin kx)' dx =$$

$$= -\frac{1}{k}\pi^2 (-1)^k + (\frac{2}{k^3}(-1)^k - \frac{2}{k^3})$$

Quindi indicata S_2 la serie di Fourier relativa a f, si ha

$$S_2 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(-\frac{1}{k}\pi^2(-1)^k + \frac{2}{k^3}(-1)^k - \frac{2}{k^3} \Big) \sin kx.$$

Esercizio 2 Sia c un parametro reale positivo e f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$x \in (-\pi, \pi] \to e^{\max\{\frac{1}{\pi}, c\} x}$$

Determinare la serie di Fourier di f .

Se $c > \frac{1}{\pi}$, risulta $f(x) = e^{cx}$, pertanto la serie vale:

$$\frac{\sinh c\pi}{\pi c} + \frac{2}{\pi} \sinh c\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + c^2} (c \cos kx - k \sin kx).$$

Se $c \le \frac{1}{\pi}$, risulta $f(x) = e^{\frac{1}{\pi}x}$, dunque la serie vale:

$$\sinh 1 + \frac{2}{\pi} \sinh 1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + (1/\pi^2)} (\frac{1}{\pi} \cos kx - k \sin kx).$$

Esercizio 3 Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0 \\ -3x, & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

Determinare la serie di Fourier di f .

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)\right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen}(kx)dx, k = 0, 1, 2, ...$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier della f.

$$a_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 3x dx = -\frac{3}{2}\pi;$$

$$a_k = -\frac{3}{\pi} \int_0^{\pi} x\cos(kx)dx = -\frac{3}{\pi} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right];$$

$$b_k = -\frac{3}{\pi} \int_0^{\pi} x\sin(kx)dx = -\frac{3}{k}(-1)^{k+1} = \frac{3}{k}(-1)^k.$$

la serie di Fourier richiesta è:

$$-\frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(kx)}{k}.$$

Esercizio 4 Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \max\{2, 2-x\}, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

Determinare la serie di Fourier di f.

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)\right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen}(kx)dx, k = 0, 1, 2, ...$$

Osserviamo che:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \in (-\pi, 0) \\ 2, & x \in [0,\pi] \end{cases} .$$

Dunque:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2dx = \frac{\pi}{2} + 4.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)\cos(kx)dx + \int_{0}^{\pi} 2\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1].$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)\mathrm{sen}(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\mathrm{sen}(kx)dx = \frac{1}{k}(-1)^k.$$

La serie di Fourier richiesta è:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+4\right) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]\cos(kx) + \frac{1}{k}(-1)^k\mathrm{sen}(kx)\right].$$

Ricordiamo: se f è pari allora $b_k = 0$, $\forall k$; se f è dispari allora $a_k = 0$, $\forall k$; inoltre per la 2π periodicità della funzione f vale

$$\int_{-\pi-a}^{\pi-a} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

per ogni a numero reale.

9.4 Esercizio. Calcolare la serie di Fourier per l'onda quadra, l'onda a dente di sega, l'onda triangolare.

9.5 Esercizio.

Data

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad -L \le x \le L$$

Dimostrare

$$\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = L\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

Dim.

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty} a_n a_m \int_{-L}^{L}\left(\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx =$$

$$y = \frac{\pi x}{L},\ dy = \frac{\pi dx}{L}$$

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty} a_n a_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin ny \sin my \quad dy = L\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

10 17.10 Disuguaglianza di Bessel. Nucleo di Dirichlet

L' identità di Parseval è un importante risultato che riguarda la sommabilità della serie di Fourier di una funzione. L'identità di Parseval stabilisce che la somma dei quadrati dei coefficienti di Fourier di una funzione è pari all'integrale del quadrato della funzione:

Un caso particolare (assumeremo che siano valide ipotesi sulla funzione che ci permettano di fare il calcolo)

Data

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

con b_n reale, si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n,m=1}^{+\infty} b_n b_m \sin nx \sin mx \quad dy =$$

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty} b_n b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$$

Da cui

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$$

10.1 Disuguaglianza di Bessel

Lemma 10.1. *Sia*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)\right],$$

allora

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)\right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, ...n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx, k = 1, 2, ...n$$

Allora calcoliamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x)dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)+b_k\mathrm{sen}(kx)\right)\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n} a_n\cos(nx)+b_n\mathrm{sen}(nx)\right)dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n} a_n\cos(nx)+b_n\mathrm{sen}(nx)\right)dx+$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)\right)\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n} a_n\cos(nx)+b_n\mathrm{sen}(nx)\right)dx+$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(b_k\mathrm{sen}(kx)\right)+\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n} a_n\cos(nx)+b_n\mathrm{sen}(nx)\right)dx =$$

$$\pi\frac{a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

Ne risulta

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

□

Lemma 10.2. *Sia*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(kx)+b_k\mathrm{sen}(kx)\right],$$

allora

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n f(x)dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

Dal precedente risultato segue

$$0 \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-s_n(x))^2dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right),$$

quindi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \ge \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

Per $n \to +\infty$ otteniamo la Disuguaglianza di Bessel

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \ge \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

Inoltre, come corollario,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < +\infty, \implies$$

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} b_k = 0,$$

ossia

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx = 0.$$

10.2 Nucleo di Dirichlet

$$d_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$

Si ha

$$d_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2}))}$$

Infatti sommiamo da 1 a n i due membri dell'identità trigonometrica

$$\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(kx)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x)) = \sin((n+\frac{1}{2})x) - \sin(\frac{x}{2})$$

Inoltre

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d_n(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Segue da $d_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$ ed effettuando l'integrazione.

10.3 Formula di Dirichlet

Teorema 10.3. *Sia f periodica di periodo 2π integrabile in $[-\pi,\pi]$. La somma parziale $s_n(x)$ della serie di Fourier di f si può esprimere in termini del nucleo di Dirichlet (integrale di convoluzione)*

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)d_n(t)dt,$$

ove

$$d_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

La dimostrazione è basata sul seguente calcolo. Per definizione di $s_n(x)$

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(kx)\cos(ky) + \sin(kx)\sin(ky))dy] =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(k(x-y))]dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(kt)]dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}dt$$

11 19.10 Teorema di Convergenza Puntuale

Definizione 11.1. *Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diciamo che f è regolare a tratti in $[a, b]$ se esistono un numero finito di punti x_i, $i = 0, 1, 2, \dots, N$ con $a_0 = x_0 = x_1 < x_1 < x_2 \dots < x_N = b$ tali che f è derivabile con derivata continua in ogni intervallo (x_i, x_{i+1}), e la restrizione di f' a (x_i, x_{i+1}) è prolungabile con continuità in $[x_i, x_{i+1}]$. Se la funzione f è definita su $\mathbb{R}$, allora diciamo f è regolare a tratti in $\mathbb{R}$ se è regolare a tratti in ogni intervallo [a,b] contenuto in $\mathbb{R}$.*

Convergenza Puntuale Per ogni x reale la successione $s_n(x)$ converge a $f(x)$. ovvero perogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice $N(x.\epsilon)$ the che

$$|s_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall N > N(x, \epsilon)$$

Teorema 11.2. *Sia f una funzione periodica regolare a tratti su $\mathbb{R}$. Per ogni x reale la serie di Fourier converge alla media aritmetica tra il limite destro e il limite sinistro:*

$$\frac{1}{2}\Big[f(x_+) + f(x_-)\Big],$$

e a $f(x)$ nei punti di continuità.

Dobbiamo considerare

$$s_n(x) - \frac{1}{2}\Big[f(x_+) + f(x_-)\Big] = \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x_+))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt +$$

$$\int_{-\pi}^{0} (f(x+t) - f(x_-))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{x}{2})}dt,$$

Poniamo

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)-f(x_+)}{2\sin(\frac{t}{2})} & 0 < t \leq \pi \\ 0 & t = 0 \\ \frac{f(x+t)-f(x_-)}{2\sin(\frac{t}{2})} & -\pi < t \leq 0 \end{cases}$$

Ne segue dalle ipotesi su f che esiste il limite per $t \to 0^+$ e per $t \to 0^-$ di F. Infatti

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = f'_+(x) \qquad \lim_{t\to 0^-} F(t) = f'_-(x)$$

F è continua a tratti in $[-\pi, \pi]$, dunque integrabile e limitata. Inoltre

$$s_n(x) - \frac{1}{2}\Big[f(x_+) + f(x_-)\Big] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt.$$

Del resto

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos\frac{t}{2}\sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin\frac{t}{2}\cos(nt)dt$$

Dalla disuguaglianza di Bessel si deduce che

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin\frac{t}{2}\cos(nt)dt \to 0$$

per $n \to +\infty$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos\frac{t}{2}\sin(nt)dt \to 0$$

per $n \to +\infty$.

In conclusione

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt \to 0,$$

per $n \to +\infty$.

11.1 Serie di Fourier in forma complessa

Data

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt} = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k\cos(kx) + i\gamma_k\sin(kx)) + \gamma_{-k}\cos(-kx) + i\gamma_k\sin(-kx)) =$$

$$\gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k+\gamma_{-k})\cos(kx) + i(\gamma_k-\gamma_{-k})\sin(kx)$$

$$\gamma_0 = a_0/2$$

$$\gamma_k + \gamma_{-k} = a_k$$

$$i(\gamma_k - \gamma_{-k}) = b_k$$

e

$$\gamma_k + \gamma_{-k} = a_k$$

$$\gamma_k - \gamma_{-k} = -ib_k$$

Sommando

$$\gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

Sottraendo

$$\gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

E' utile scrivere la serie di Fourier nella forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

Risulta per $n \neq m$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

In conclusione

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \delta_{n,m}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

11.2 Serie di Fourier per funzioni periodiche di periodo $T \neq 2\pi$.

Sia f periodica di periodo $L \neq 2\pi$. Consideriamo $\tilde{f}(y) = f(\frac{Ly}{2\pi})$, allora $\tilde{f}$ è periodica di periodo 2π.

La serie di Fourier di $\tilde{f}$ è data da

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(ky) + b_k \sin(ky)$$

La serie di Fourier di f risulta ($x := \frac{Ly}{2\pi}$)

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{2k\pi}{L}x) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{L}x)$$

i cui coefficienti sono

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y)\cos(ky)dy = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos(\frac{2k\pi}{L}x)dx$$

$k = 0, 1 \ldots$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y)\sin(ky)dy = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin(\frac{2k\pi}{L}x)dx$$

$k = 1 \ldots$

12 20.10 Esercizi

Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ -3x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$-\frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k \sin(kx)}{k}.$$

Poichè f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ distinti da $\pi+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier la serie converge ad f in tali punti. Notiamo che, se $x = \pi$, la serie si riduce a :

$$-\frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Poiché

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{8}\pi^2,$$

questa somma vale:

$$\frac{f(\pi_+)+f(\pi_-)}{2} = -\frac{3\pi}{2}.$$

Esercizio 1. Sia α un numero reale positivo. Determinare, al variare di α, il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Esercizio 2. Sia $x \in \mathbb{R}$, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Allora se f è pari e g è dispari $f+g$ è dispari

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio 3. Sia $x \in \mathbb{R}$, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Allora se f è dispari e g è dispari fg è dispari

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio 4. Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione

$$f(x) = \cosh x^2.$$

Esercizio 5. Scrivere la serie di Fourier della funzione $f(x) = 0$ in $[-\pi, 0)$ e $f(x) = 1$ in $[0, \pi)$ ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$

Esercizio 6. Scrivere la serie di Fourier della funzione $f(x) = x$ in $[-\pi, \pi)$ ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$

Esercizio 7. Vale

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{(2k-1)^2}$$

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio 8. Vale

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}$$

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

13 Topologia in $\mathbb{R}^2$, punti interni, esterni, e di frontiera. Insiemi aperti, chiusi, chiusura di un insieme. Funzioni di due variabili, nozione di limite

Ricordiamo che per $x, y \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietá

- $|x| \geq 0$
- $x \neq 0$ se e solo se $|x| > 0$
- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

13.1 Norma

$\mathbb{R}^2$ con $p > 1$. La formula
$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}.$$
definisce una norma in $\mathbb{R}^2$.

Per $p = 2$
$$\|x\| = \|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)^{1/2}.$$

Occorre verificare che valgono le seguenti proprietà $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geq 0,$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0,$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$
- $|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|,$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$
- $|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Il prodotto scalare di due elementi di $\mathbb{R}^2$
$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$
è minore o uguale al prodotto delle loro norme.
$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|$$
l'uguaglianza che sussiste solo se x e y sono multipli.
$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda x \cdot y + |\lambda|^2 \|y\|^2$$

Disuguaglianza di secondo grado in λ

$$\Delta \leq 0$$

$$(x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

Ne segue

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

13.2 Interno, Esterno, Frontiera di un insieme

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Definizione 13.1. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ un numero reale. $B_r(x_0)$ di centro x_0 e raggio r per*

$$B_r(x_0) := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x - x_0\| < r \right\}.$$

- Per $m = 1$ troviamo gli intervalli $]a - r, a + r[$.
- Per $m = 2$ troviamo il cerchio privato dei suoi punti frontiera
- Per $m = 3$ troviamo la palla privata dei suoi punti frontiera

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ e $x \in \mathbb{R}^2$.

- x è un *punto interno* di A se esiste $r > 0$ tale $B_r(x) \subset A$.
- x è un *punto esterno* di A se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$.
- x è un *punto frontiera* di A se $B_r(x)$ incontra A e $\mathbb{R}^m \setminus A$ per ogni $r > 0$.

L'insieme dei punti interni esterni e di frontiera si chiama *interno*, *esterno* e la *frontiera* dia A, e si denota con $int(A)$, $ext(A)$ e ∂A. Si utilizza anche la notazione A° invece di $int(A)$.
Sia $A \subset \mathbb{R}^2$.

- Gli insiemi $int(A)$, $ext(A)$, ∂A formano una *partizione* di $\mathbb{R}^2$: sono disgiunti e la loro riunione fornisce $\mathbb{R}^2$.

13.3 Insiemi aperti, chiusi, compatti

Definizione 13.2. *Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ e $x \in \mathbb{R}^2$. Si dice che il punto x è di accumulazione per X se la palla $B_r(x)$ incontra X per ogni $r > 0$. L'insieme dei punti x con questa proprietà si chiama chiusura di X e si denota con $\overline{X}$.*

Proposizione 4. *Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ e $x \in \mathbb{R}^2$, allora*

$$x \in \overline{X} \iff \exists\, (x_n) \subset X \,\mathrm{e}\, x_n \to x$$

Definizione 13.3. *Sia $X \subset \mathbb{R}^2$. Si dice che X è un insieme aperto se per ogni $x \in X$ se esiste $r > 0$ tale che la palla $B_r(x)$ è interamente contenuta in X.*

Dati due punti distinti di $\mathbb{R}^2$ x e y esistono due aperti X e Y tali che $x \in X$ $y \in X$ e $X \cap Y = \emptyset$.

Proposizione 5. *$\emptyset$ e $\mathbb{R}^2$ sono aperti. L' unione qualsiasi di insiemi aperti è un insieme aperto. L'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.*

Definizione 13.4. *Un insieme X è chiuso se l'insieme complementare in $\mathbb{R}^2$ è aperto*

$\overline{X}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene X.

Proposizione 6. *$\emptyset$ e $\mathbb{R}^2$ sono chiusi. L'unione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso. L'intersezione qualunque di insiemi chiusi è un insieme chiuso .*

Definizione 13.5. *K è limitato $\iff$ esiste una costante L tale che $\|x\| < L$ per ogni $x \in K$*
Il diametro di K è definito come

$$diam(K) = \sup\{\|x - y\|, x, y \in K\}.$$

Se $diam(K) = +\infty$ diremo che K è illimitato.

Definizione 13.6. *K è compatto se $\forall (x_n) \subset X$ esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) con $\lim x_{n_k} \in X$*

Teorema 13.7. *(***Teorema di Heine-Borel)** *K compatto di $\mathbb{R}^m \iff K$ è chiuso e limitato*

13.4 Esercizio.

Calcolare l'insieme di definizione delle funzioni descrivendone le proprietà (aperto, chiuso, né aperto nè chiuso, limitato, illimitato)

- $f(x, y) = \ln(2 - x^2 - y^2)$
- $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
- $f(x, y) = \ln(1 - x^2) + \ln(1 - y^2)$
- $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$
- $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2-4}$
- $f(x, y) = \sqrt{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}$

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) punto di accumulazione per A. Si dice che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$$

se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in A \neq (x_0, y_0)$ tale che $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ risulta

$$|f(x, y) - L| < \epsilon$$

13.5 Esercizio.

Verificare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

13.6 Esercizio.

Verificare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3+5x^2+5y^2}{x^2+y^2} = 5$$

14 26-10 Limiti. Non esistenza di limiti. Continuità.

14.1 Esercizio n.1

Esempio di funzione che non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y=mx)\to(0,0)} \frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

14.2 Esercizio n.2

Esempio di funzione che non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$ anche se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx) = 0$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

Si ha

$$f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{m^2x}{1+m^4x^2},$$

quindi

$$\lim_{(x,y=mx)\to(0,0)} f(x,mx) = 0.$$

Mentre

$$f(y^2,y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2},$$

quindi

$$\lim_{(x=y^2,y)\to(0,0)} f(y^2,y) = \frac{1}{2}.$$

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in A$ punto di accumulazione per A. Si dice che f è continua in (x_0,y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in A$ tale che $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ risulta

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$$

La continuità non discende dall'esistenza delle derivate parziali prime.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = 0 \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \end{cases}$$

In $(0,0)$ la funzione ammette derivate prime nulle, ma non è continua. Esempio di funzione che ammette derivate parziali prime in un punto ma non è continua nel punto.

15 27-10 Limiti. Derivate parziali prime e seconde. Operatori: Gradiente, Divergenza, Laplaciano, (n=2,n=3)

15.1 Esercizio.

Calcolare f_x f_y ove definite

- $f(x,y) = x + 7y$
- $f(x,y) = 2xy$
- $f(x,y) = \frac{1}{2}\frac{x}{y}$
- $f(x,y) = \sqrt{3x^2 + y^2}$
- $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 5}$
- $f(x,y) = \sin(x+y)$
- $f(x,y) = \operatorname{arctg}(2xy)$
- $f(x,y) = \ln(4xy)$
- $f(x,y) = \ln(2x+3y)$
- $f(x,y) = \pi^x \pi^y$

Esempio di funzione continua che non ammette derivate parziali prime in un punto.

Nel punto $(0,0)$ la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

non ammette le derivate parziali. Ricordiamo che una funzione f definita in un intorno di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, f si dice derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Il valore del limite si indica con $f_x(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a x della funzione in (x_0, y_0). Inoltre f si dice derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

I valore del limite si indica con $f_y(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a y della funzione in (x_0, y_0).

Dovrebbe esistere finito

$$?\ \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h},$$

tale limite non esiste. Analogamente

$$?\ \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{|k|}{k},$$

non ammette limite. Se$f \in C^2(A)$ ossia ammette derivate parziali seconde in A, possiamo associare a f la sua *matrice hessiana*

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

e il determinante della matrice hessiana, è dato da

$$|H| = f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx}$$

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

La traccia della matrice hessiana definisce l'operatore di Laplace o laplaciano

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} \qquad n = 2$$

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \qquad n = 3$$

Nel caso in cui le derivate seconde miste siano uguali la matrice hessiana risulta simmetrica. Ad ogni matrice simmetrica possiamo associare un polinomio di secondo grado in due variabli (h,k) omogeneo che costuisce la forma quadratica associata.

15.2 Forme quadratiche in $\mathbb{R}^2$ e la matrice Hessiana

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \tag{1}$$

Una matrice Q si dice *non negativa* (rispettivamente, *non positiva*) se la forma $w^T Q w$ o $Qw \cdot w$ ($w = (h,k) \in \mathbb{R}^2$) is semidefinita positiva (rispettivamente negativa) cioè se

$$w^T Q w = ah^2 + 2bhk + ck^2 \geq 0$$

$$\text{(rispettivamente, } w^T Q w \leq 0,) \, \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2,$$

ed esiste z non nullo per cui $w^T Q w = 0$. Una matrice Q si dice *positiva* (rispettivamente, *negativa*) se la forma $z^T Q z$ è *positiva* (rispettivamente, *negativa*)

$$w^T Q w = ah^2 + 2bhk + ck^2 > 0 \ (w^T Q w < 0) \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \ (h,k) \neq 0.$$

Indefinita se esistono w_1 e w_2 tali che $w_1^T Q w_1 > 0$, $w_2^T Q w_2 < 0$.

Esempio 15.1. *Un esempio di matrice positiva è data da*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

poichè $h^2 + k^2 > 0 \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, h,k \neq 0$. *Un esempio di matrice non negativa è data da*

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

poichè $2h^2 \geq 0 \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$, *potendo essere nulla nei punti* $(0,k)$.

Una matrice indefinita è data da

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

poichè $h^2 - 2k^2$ in $(1,1)$ è negativa, e in $(2,1)$ è positiva.

Abbiamo il seguente

Teorema 15.2. *Sia*

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$|Q| = \text{det}Q = ac - b^2.$$

Allora

$$|Q| > 0 \quad \text{e } a > 0, \iff Q > 0$$

$$|Q| > 0 \quad \text{e } a < 0, \iff Q < 0$$

Se detQ < 0*, allora Q è indefinita.*

Dimostrazione. Data la forma quadratica

$$ah^2 + 2bhk + ck^2,$$

essa può essere equivalentemente scritta

$$a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}k^2,$$

da questa formula si evince chiaramente il risultato, perché abbiamo una quantità

$$\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 \geq 0$$

e $ac - b^2$ è il determinante di Q, assumendo $detQ > 0$ allora se $a > 0$ risulterà

$$a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}k^2 > 0,$$

mentre se $a < 0$

$$a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}k^2 < 0,$$

□

Se f ammette derivate parziali seconde in A, possiamo associare a f la sua *matrice hessiana.*

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui le derivate seconde miste siano uguali la matrice hessiana risulta simmetrica.

$$D^2 f(x,y) = H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

e il determinante della matrice hessiana, è dato da

$$det(H(f)(x,y) = |H(f)(x,y)| = f_{xx}(x,y)(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$$

Allora

$$H(f)(x,y) > 0 \iff |H(f)(x,y)| > 0 \;\; f_{xx}(x,y) > 0$$

$$H(f)(x,y) < 0 \iff |H(f)(x,y)| > 0 \;\; f_{xx}(x,y) < 0$$

La traccia della matrice hessiana definisce l'operatore di Laplace o laplaciano

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} \qquad n = 2$$

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \qquad n = 3$$

Una funzione si dice armonica in un aperto A di $\mathbb{R}^2$ se ammette derivate seconde $f_{xx} \quad f_{yy}$ che verificano l'equazione di Laplace

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$$

15.3 Esercizio.

Calcolare la matrice hessiana della funzione:

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

punto di accumulazione

15.4 Esercizi

Verificare che le le seguenti funzioni sono armoniche

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Ricordiamo le principali definizioni e notazioni. Con F indichiamo un campo vettoriale, F_1, F_2 ed F_3 sono le sue componenti.
Con f, g indichiamo funzioni a valori reali definite su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$.
Tutte le funzioni sono sufficientemente regolari (ad esempio $F \in C^1$, $f \in C^2$).

Definizione 15.3.

$$\nabla f = (f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right);$$

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

$$divF = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z};$$

Dimostrare $\Delta f = div(Df)$.

Applicando le definizioni precedenti

$$div(Df) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

16 27-10. Teorema di Schwarz

Teorema 16.1. *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$. (x_0, y_0) un punto di A e f una funzione derivabile due volte in A. Se le derivate parziali miste sono continue in (x_0, y_0) allora*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Dimostrazione. Sia (x, y) un punto di $\mathbb{R}^2 : x \neq x_0, y \neq y_0$. Si pone
$F(x) = f(x, y) - f(x, y_0)$ y fissato
$G(y) = f(x, y) - f(x_0, y)$ x fissato. Risulta

$$F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0)$$

Applicando due volte il teorema di Lagrange

$$F(x) - F(x_0) = f_{xy}(x_1, y_1)(x - x_0)(y - y_0)$$

$$G(y) - G(y_0) = f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0),$$

con $(x_1, y_1) \to (x_0, y_0)$, $(x_2, y_2) \to (x_0, y_0)$, per $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Ne segue

$$f_{xy}(x_1, y_1) = f_{yx}(x_2, y_2),$$

passando al limite per $(x, y) \to (x_0, y_0)$

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0),$$

□

La sola esistenza delle derivate parziali seconde miste non basta per l'invertibilità delle derivate miste **Esercizio 1.** Verificare, applicando la definizione, che

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

ammette derivate parziali seconde miste $(0, 0)$ ma

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0).$$

Teorema 16.2. *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^3$. (x_0, y_0, z_0) un punto di A e f una funzione derivabile due volte in A. Se le derivate parziali miste sono continue in (x_0, y_0, z_0) allora*

$$f_{xy}(x_0, y_0, z_0) = f_{yx}(x_0, y_0, z_0)$$

$$f_{xz}(x_0, y_0, z_0) = f_{zx}(x_0, y_0, z_0)$$

$$f_{zy}(x_0, y_0, z_0) = f_{yz}(x_0, y_0, z_0)$$

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$

Definizione 16.3. *f è differenziabile in (x, y) se f ammette derivate parziali prime e vale*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

f è differenziabile in A se è differenziabile in ogni punto (x, y) di A.

Esercizio 1. Verificare, applicando la definizione, che per ogni valore del parametri α e β reali

$$f(x, y) = (x + \alpha)(y + \beta),$$

è differenziabile in $(0, 0)$.

La relazione di limite può scriversi

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = f_x(x, y)h + f_y(x, y)k + o(\sqrt{h^2 + k^2})\ (h, k) \to (0, 0)$$

Da cui si evince la continuità nel punto passando al limite per $(h, k) \to (0, 0)$.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x+h, y+k) = f(x, y)$$

17 2-11. Teorema del differenziale. Funzioni composte. Derivazione di funzioni composte. Derivata direzionale.

Teorema 17.1. *Sia f dotata di derivate parziali prime in un aperto A di $\mathbb{R}^2$. Se le derivate parziali prime sono continue in A allora f è differenziabile in A.*

Dimostrazione. Occorre dimostrare

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k = o(\sqrt{h^2 + k^2})\ (h, k) \to (0, 0).$$

Consideriamo

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k$$

Applicando due volte il teorema di Lagrange

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) = f_x(x_1, y+k)h$$

$$f(x, y+k) - f(x, y) = f_y(x, y_1)k$$

con $x_1 \to x$, $y_1 \to y$ per $(h, k) \to (0, 0)$. Otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}|f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)||h| + \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}|f_y(x, y_1)k - f_y(x, y)||k| =$$

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}}|f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)| + \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}|f_y(x, y_1)k - f_y(x, y)|$$

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} < 1 \qquad \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} < 1$$

Ne segue

$$\leq |f_x(x_1, y+k) - f_x(x,y)| + |f_y(x, y_1)k - f_y(x,y)|$$

Per l'ipotesi di continuità delle derivate parziali si ha che tende a zero per $(h,k) \to (0,0)$, dimostrando così la differenziabilità.

□

Notazione $f \in C^k(A)$: f è dotata di derivate parziali prime continue; $C^0(A)$ funzioni continue in A.

Dal teorema del differenziale

$$C^0(A) \supset C^1(A) \supset C^2(A) \supset C^3(A) \cdots \supset C^\infty(A)$$

Sia $t \in I$, I intervallo. Consideriamo l'applicazione $t \to (x(t), y(t))$. Sia $(x(t), y(t)) \in A$ $F : A \to \mathbb{R}$.

$$F(t) = f(x(t), y(t)),$$

vale

Teorema 17.2. *Assumiamo $x(t)$, $y(t)$ derivabili in $t \in I$. Sia f differenziabile in $(x(t), y(t)) \in A$. Allora F è derivabile in t e*

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

Dimostrazione.

$$F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} =$$

Per la differenziabilità

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} =$$

$$f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} o(\sqrt{(x(t+h) - x(t))^2 + (y(t+h) - y(t))^2}$$

Risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} o(\sqrt{(x(t+h) - x(t))^2 + (y(t+h) - y(t))^2} = 0$$

□

17.1 Derivate direzionali

Per direzione si intende un vettore di modulo unitario.

In $\mathbb{R}^2$ la derivata direzionale rispetto a una direzione λ

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t\alpha), y(t + t\beta)) - f(x,y)}{t}$$

Vale il seguente

Teorema 17.3. *Assumiamo Sia f differenziabile in $(x,y) \in A$. Allora f ammette derivata direzionale rispetto a ogni direzione λ e vale*

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,y) = f_x(x,y)\alpha + f_y(x,y)\beta$$

Esercizio 1. Data $f(x,y) = x^2 - y^2$ calcolare la derivata direzionale nel punto $(1,1)$ lungo la direzione $(1/\sqrt{2},(1/\sqrt{2})$.

$f_x = 2x,\ f_y = -2y\ f_x(1,1) = 2,\ f_y(1,1) = -2$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,y) = 2/\sqrt{2} - 2/\sqrt{2} = 0$$

17.2 Insiemi connessi in $\mathbb{R}^2$

Un insieme aperto A si dice connesso se non esistono due aperti disgiunti non vuoti di $\mathbb{R}^2$ la cui unione sia A.

Teorema 17.4. *Sia A un insieme aperto connesso e sia f dotata di derivate parziali nulle in A. Allora f è costante in A,*

18 3-11. Esercizi.

Esercizio 1.

Per ogni $f,g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile due volte

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + +f(\Delta g).$$
$$\Delta(f+g) = \Delta(f) + \Delta(g)$$

$\boxed{a}$ vera

$\boxed{b}$ la prima è vera e la seconda è falsa

$\boxed{c}$ la seconda è vera e la prima è falsa

$\boxed{d}$ entrambe false

$risposta : (c)$

Esercizio 2.

Per ogni $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$.

$$rot(Df) = 0$$

$\boxed{a}$ vera

$\boxed{b}$ falsa

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$
$$rotF = \left(-\frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, -\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\right);$$

$risposta : (a)$

Esercizio 3.

Per ogni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f \in C^4(\mathbb{R}^2)$

$$\Delta(\Delta f) = f_{xxxx} + f_{yyyy}$$

$\boxed{\text{a}}$ vera $\boxed{\text{b}}$ falsa

risposta : (b)

Esercizio 4.

Per ogni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. $D^2 f$ indica la matrice hessiana di f

$$det(D^2 f) = 0 \iff f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) = f_{xy}^2(x,y)$$

$\boxed{\text{a}}$ vera $\boxed{\text{b}}$ falsa

risposta : (a)

Esercizio 5.

$$\arctan\frac{x}{y} + \arctan\frac{y}{x} = -\frac{\pi}{2} \qquad x > 0,\ y < 0$$

$\boxed{\text{a}}$ vera $\boxed{\text{b}}$ falsa

risposta : (a)

Esercizio 6.

$$\arctan\frac{x}{y} + \arctan\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad x < 0,\ y < 0$$

$\boxed{\text{a}}$ vera $\boxed{\text{b}}$ falsa

risposta : (a)

Esercizio 7 Sviluppare in serie di Taylor intorno a $x = 0$ la funzione $f(x) = e^{x^3}$

risposta : $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{k!}$

Esercizio 8 Calcolare i punti in cui si annulla il gradiente della funzione

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

risposta : $(0,0)$

Esercizio 9

Calcolare la matrice hessiana della funzione

$$f(x,y) = e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$

Calcoliamo la matrice hessiana

$$\begin{pmatrix} -2e^{-(x_1^2+x_2^2)} + 4x_1^2 e^{-(x_1^2+x_2^2)} & 4x_1x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)} \\ 4x_1x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)} & -2e^{-(x_1^2+x_2^2)} + 4x_2^2 e^{-(x_1^2+x_2^2)} \end{pmatrix}$$

Il punto $(0,0)$ è di massimo relativo (e assoluto). Infatti

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice hessiana calcolata nel punto è definita negativa e la funzione è sempre minore o uguale di uno.

La matrice hessiana

$$e^{-2(x_1^2+x_2^2)} \begin{pmatrix} -2+4x_1^2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & -2+4x_2^2 \end{pmatrix}$$

ha determinante

$$e^{-2(x_1^2+x_2^2)}[(-2+4x_1^2)(-2+4x_2^2) - 16x_1^2x_2] =$$

$$e^{-2(x_1^2+x_2^2)}(4 - 8(x_1^2+x_2^2))$$

La matrice è definita negativa se $1 - 2(x_1^2+x_2^2) > 0$ e $-1 + 2x_1^2 < 0$.

18.1 Minimi e Massimi Locali

Definizione 18.1. *Sia A un aperto e $f : A \to \mathbb{R}$, sia $(x_0, y_0) \in A$. Se esiste $r > 0$ tale che comunque preso $(x, y) \in A \cap B_r(x_0, y_0)$ risulta $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale e $f(x_0, y_0)$ è minimo locale.*

Definizione 18.2. *Sia A un aperto e $f : A \to \mathbb{R}$, sia $(x_0, y_0) \in A$. Se esiste $r > 0$ tale che comunque preso $(x, y) \in A \cap B_r(x_0, y_0)$ risulta $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale e $f(x_0, , y_0)$ è massimo locale.*

Sia A un aperto e $f : A \to \mathbb{R}$, sia $(x_0, y_0) \in A$. Se f è derivabile e x_0 è un punto di minimo o di massimo relativo allora $\text{grad} f(x_0, y_0) = 0$.

I punti in cui $\text{grad} f(x_0, y_0) = 0$ si chiamano stazionari

19 7-11 La formula dello sviluppo secondo Taylor in $\mathbb{R}^2$

Assumeremo ipotesi di regolarità. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$, Siano (x, y), $(x + h, t + k)$ punti di A : il segmento di estremi (x, y), $(x + h, t + k)$ sia contenuto in A. $f \in C^2(A)$

Dimostreremo la seguente formula

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + f_x(x, y)h + f_y(x, y)k$$

$$\frac{1}{2}\big(f_{xx}(x, y)h^2 + 2f_{xy}(x, y)hk + f_{yy}(x, y)k^2\big)$$

$$+o(h^2+k^2) \;\; (h, k) \to (0, 0)$$

19.1 La formula di Taylor in $\mathbb{R}^2$ con il resto di Lagrange

Teorema 19.1. *Sia $f \in C^2(A)$. Siano (x,y), $(x+h,t+k)$ punti di A : il segmento di estremi (x,y), $(x+h,t+k)$ sia contenuto in A. Esiste $\theta \in (0,1)$ tale che*

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k$$

$$\frac{1}{2}\big(f_{xx}(x+\theta h, y+\theta k)h^2 + 2f_{xy}(x+\theta h, y+\theta k)hk + f_{yy}(x+\theta h, y+\theta k)k^2\Big)$$

Dimostrazione. Dalla $(x(t), y(t)) = (x+th, y+tk)$ con h piccolo e $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. Poniamo

$$F(t) = f(x+th, y+tk).$$

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte ove $x(t) = x+th, y(t) = y+tk$, si ottiene

$$F'(t) = f_x(x+th,y+tk)h + f_y(x+th,y+tk)k$$

applicandola di nuovo

$$F''(t) = f_{xx}(x+th,y+tk)h^2 + 2f_{xy}(x+th,y+tk)hk + f_{yy}(x+th,y+tk)k^2$$

dalla formula di Taylor per funzioni di una variabile reale si ottiene

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta)$$

con $\theta \in (0,1)$.

Sostituendo in $F(t) = f(x+th, y+tk)$ si ottiene

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k$$

$$f_{xx}(x+\theta h, y+\theta k)h^2 + 2f_{xy}(x+\theta h, y+\theta k)hk + f_{yy}(x+\theta h, y+\theta k)k^2$$

□

19.2 La formula di Taylor in $\mathbb{R}^2$ con il resto di Peano

Dimostreremo la seguente formula

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k$$

$$\frac{1}{2}\big(f_{xx}(x,y)h^2 + 2f_{xy}(x,y)hk + f_{yy}(x,y)k^2\big)$$

$$+o(h^2+k^2) \ \ (h,k) \to (0,0)$$

Dimostrazione.

$$f_{xx}(x+\theta h, y+\theta k)h^2 + 2f_{xy}(x+\theta h, y+\theta k)hk + f_{yy}(x+\theta h, y+\theta k)k^2 -$$

$$f_{xx}(x,y)h^2 + 2f_{xy}(x,y)hk + f_{yy}(x,y)k^2 =$$

$$+o(h^2+k^2) \ \ (h,k) \to (0,0)$$

$$\big(f_{xx}(x+\theta h, y+\theta k) - f_{xx}(x,y)\big)\frac{h^2}{h^2+k^2}$$

$$\big(f_{xy}(x+\theta h, y+\theta k) - f_{xy}(x,y)\big)\frac{hk}{h^2+k^2}$$

$$\big(f_{yy}(x+\theta h, y+\theta k) - f_{yy}(x,y)\big)\frac{k^2}{h^2+k^2}$$

Per $(h,k) \to (0,0)$ otteniamo il risultato $\square$