# 1 Lezione n.1 : Serie di Potenze

## 1.1 La Serie geometrica

Consideriamo serie geometrica di ragione $x$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ridotta $n$-sima

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

.

Se $x = 1$ si ha

$$s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Sia $x \neq 1$. Si ha

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Se $|x| < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Se $x > 1$, poichè $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \cdot \lim_{n\to\infty} x^n - \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

Sia ora $x = -1$,

$$s_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2p \\ 1 & , \quad n = 2p + 1 \end{cases}$$

Pertanto la successione $(s_n)_{\mathbb{N}}$ non è regolare.
Sia infine $x < -1$. Possiamo scrivere $x = -|x|$, e quindi

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1 - (-|x|)^n}{1 + |x|} = \frac{1 - (-1)^n |x|^n}{1 + |x|} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1 - |x|^{2p}}{1 + |x|}, & n = 2p \\ \dfrac{1 + |x|^{2p-1}}{1 + |x|}, & n = 2p - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ne segue che $S_{2p} \to -\infty$ e $S_{2p-1} \to +\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{n\to\infty} s_n$
Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1 - x} & x \in (-1, 1) \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

## 1.2 Definizione e prime proprietà

La Serie geometrica costituisce un caso particolare di serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

quando $a_n = 1 \quad n = 0, 1, \ldots\ldots \quad$ e $x_0 = 0$.
In generale i coefficienti $a_n$ costituiscono una successione di numeri reali.
Con una traslazione $y = x - x_0$ possiamo ricondurci al caso $x_0 = 0$
Infatti supponiamo di dover studiare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$$

Si pone $y = x - 1$ e si studia

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n,$$

che sappiamo essere convergente per $|y| < 1$.

$$|y| < 1 \iff |x-1| < 1 \iff -1 < x-1 < 1 \iff 0 < x < 2$$

Concentriamo la nostra analisi sul ruolo dei coefficienti $a_n$. Osserviamo di aver incontrato già le serie di potenze con nello studio delle serie numeriche (oltre le serie geometriche). Facciamo alcuni esempi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. Il caso $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie diverge (serie armonica), per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge è dato da $(-1, 1) \cup \{-1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie converge, per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge è dato da $(-1, 1) \cup \{-1, 1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per ogni $x$ reale.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge solo per $x = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < \frac{1}{3}$. $|x| = \frac{1}{3}$ deve essere studiato separatamente per $x = \frac{1}{3}$ la serie diverge, per $x = -\frac{1}{3}$ la serie è indeterminata.

Vediamo negli esempi che l'insieme di convergenza è un intervallo, l'analisi nei punti di estremo dell'intervallo varia da caso a caso. Indichiamo con $E$ l'insieme dei punti $x$ in cui la serie converge e definiamo raggio di convergenza della serie

$$r = \sup E$$

Osserviamo che questa definizione è estendibile al caso complesso. Sia $z \in \mathbb{C}$. Ripartendo dalla serie geometrica e ricordando che

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} \text{ è il modulo di } z.$$

abbiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge se $|z| < 1$. Nel piano complesso $(\Re z, \Im z)$ l'insieme $\sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} < 1$ individua il cerchio di centro 0 e raggio 1 privato della circonferenza. Il raggio di convergenza (in questo caso si ha perfetta corrispondenza con l'immagine grafica) è 1.

Dimostriamo ora che l'intuizione maturata sulla struttura dell'insieme di convergenza corrisponde a un risultato matematico.

**Proposizione 1.** *Se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*converge in un punto* $x_1$ *allora converge (assolutamente) in ogni punto* $x$ *tale che* $|x| < |x_1|$.

*Dimostrazione.* Sappiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

converge. Assumiamo $x_1 \neq 0$. Ne segue dalla condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n \to +\infty} a_n x_1^n = 0,$$

ne segue che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per $n > N$

$$|a_n x_1^n| < 1.$$

Allora per $n > N$

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x^n}{x_1^n}\right| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

Quindi tenuto conto che $|a_n x_1^n| < 1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

L'ultima serie converge se $|x| < |x_1|$. □

## 2 Serie di Potenze ed equazione di Bessel di ordine zero

Illustriamo il Metodo di Frobenius per illustrare come determinare la soluzione dell'equazione di Bessel di ordine 0.

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, \qquad x > 0$$

Ricordiamo le equazioni di Bessel di ordine $n$

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0, \qquad x > 0$$

Aggiungiamo la condizione in $x = 0$, $y(0) = 1$,

$$y'(x) = -xy''(x) - xy(x), \qquad y'(0) = 0$$

Ricapitolando vogliamo risolvere

$$\begin{cases} xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, & x > 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Assumiamo che la soluzione sia esprimibile in serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dalla condizione $y(0) = 1$ si ricava $a_0 = 1$. Dunque

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} x^{m+1}$$

Calcoliamo i singoli termini

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y'(x) = a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \qquad xy''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}$$

Sostituendo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}+a_1+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

Riordinando

$$a_1+\sum_{n=0}^{\infty}\bigg(a_n+(n+2)^2a_{n+2}\bigg)x^{n+1}=0.$$

Ricaviamo $a_0=1, \quad a_1=0.$

$$a_n+(n+2)^2a_{n+2}=0 \qquad a_{n+2}=-\frac{1}{(n+2)^2}a_n$$

Se $n$ è dispari $a_n=0$, se $n$ è pari allora $n=2k\ k\in\mathbb{N}$

$$a_{2(k+1)}=-\frac{1}{2^2(k+1)^2}a_{2k}$$

$$a_2=-\frac{1}{2^2}a_0=-\frac{1}{2^2}$$
$$a_4=-\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2}a_0=\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^4}$$
$$a_6=-\frac{1}{2^2}\frac{1}{3^2}a_4=-\frac{1}{2^2}\frac{1}{3^2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^4}=-\frac{1}{2^6}\frac{1}{(3!)^2}$$
$$\cdots$$
$$\cdots$$
$$\cdots$$
$$\begin{cases}a_{2n+1}=0,\\ a_{2n}=(-1)^n\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{(n!)^2},\end{cases}$$

Otteniamo

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{(n!)^2}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}\frac{x^{2n}}{2^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

funzione di Bessel di ordine 0.

# 3 Lezione n.2 : Serie di Potenze

## 3.1 Criteri per la determinazione del raggio di convergenza

**Teorema 3.1.** *(Criterio di Cauchy) Se esiste il limite (anche $+\infty$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

*allora*

$$r = \frac{1}{l}$$

**Teorema 3.2.** *(Criterio di D'Alembert) Sia $a_n \neq 0$, per ogni $n$. Se esiste il limite (anche $+\infty$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l,$$

*allora*

$$r = \frac{1}{l}.$$

Se $l = +\infty$ allora $r = 0$, se $l = 0$ allora $r = +\infty$

**Esercizio 3.3.** *Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n$$

Calcoliamo

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n}).$$

Ne segue $l = \frac{1}{3}$ e $r = 3$

Ricapitolando: data la serie di potenze, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ determiniamo il raggio di convergenza $r$ (i criteri non fanno intervenire $x$). Allora la serie converge assolutamente per $|x| < r$, non converge per $|x| > r$, in generale nulla si può dire per $|x| = r$.

Ricapitolando

**Teorema 3.4.** *Data la serie di potenze si verifica sempre uno dei seguenti casi*

- *la serie converge per $x = 0$*
- *la serie converge per ogni $x$ reale*
- *la serie converge per $|x| < r$ e non converge per $|x| > r$*

# 4 Serie di Potenze: Integrale e Derivata

## 4.1 Derivazione termine a termine

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < r.$$

La serie derivata

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (applicare il criterio di D'Alembert), la somma $f(x)$ è derivabile e vale

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad |x| < r.$$

Vediamo un'applicazione del risultato.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

## 4.2 Integrazione termine a termine

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < r.$$

Si ha

$$\int_0^x f(s)ds = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x| < r$$

Utilizziamo questo risultato.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad |x| < 1,$$

Integrando

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \qquad |x| < 1$$

Possiamo utilizzare il risultato per integrare per serie alcune funzioni non integrabili elementarmente. Per $a > 0$ calcoliamo

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} d\,x = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

Introduciamo la funzione degli errori introdotta da Gauss

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} t^{2n} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

# 5 Lezione n.3: Serie di Taylor

Data una funzione $f \in C^\infty(x_0 - r, x_0 + r)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

si dice serie di Taylor relativa al punto $x_0$. Se vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \qquad |x - x_0| < r,$$

la funzione $f$ si dice sviluppabile in serie di Taylor per $x$: $\;|x - x_0| < r$.

Il seguente esempio mostra che che esistono funzioni $f \in C^\infty(-r, r)$ che non sono uguali alla serie di Taylor.

**Esempio 5.1.**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

*La funzione presenta derivate tutte nulle in $x_0 = 0$, e quindi la serie di Taylor ad essa relativa vale 0 e non coincide con la funzione.*

Funzioni analitiche (in senso reale).

**Definizione 5.2.** *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ ($I$ intervallo con $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$) si dice analitica in senso reale se è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ di $x_0$. $f$ si dice analitica in $I$ se è analitica in ogni punto di $I$.*

Ci occupiamo di condizioni di sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor.

**Definizione 5.3.** *Se $f$ è derivabile $n+1$ volte, il resto dato dalla formula di Taylor*

$$r(x_0, n, x) = r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Sappiamo (resto di Peano) che

$$r(x_0, n, x) = o((x - x_0)^n) \qquad x \to x_0.$$

Ci occupiamo di condizioni per cui

$$r(x_0, n, x) \to 0 \qquad n \to +\infty$$

## 5.1 Resto Integrale e di Lagrange

Deduciamo ora altre espressioni del resto

**Teorema 5.4.** *Se $f$ è derivabile $n+1$ volte, il resto si può esprimere*

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione del risultato segue il principio di induzione. Per $n = 0$ il risultato segue da

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Assumiamo vera l'affermazione al passo $n-1$. Il resto al passo $n-1$ si esprime

$$r_{n-1}(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Si ha

$$r_{n-1}(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]' dt =$$

$$-\left[\frac{(x-t)^n}{n!} f^n(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

$$= \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

In conclusione

$$r(x_0, n-1, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

e quindi

$$r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) =$$

$$\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

□

Dalla formula del resto integrale si deduce la formula del resto di Lagrange.

**Teorema 5.5.** *Se $f$ è derivabile $n+1$ volte in un intervallo $I$ e $x, x_0$ sono punti di $I$, esiste un punto $\xi$ compreso tra $x$ e $x_0$ tale che*

$$r_n(x_0, x) = f^{n+1}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

*Dimostrazione.*

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt =$$

Assumiamo $x > x_0$. In $[x_0, x]$ applichiamo il teorema della media integrale

$$m \le f^{n+1}(t) \le M,$$

essendo

$$m = \min_{[x_0,x]} f^{n+1}(t) \qquad M = \max_{[x_0,x]} f^{n+1}(t).$$

Abbiamo

$$m\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \le \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \le M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ossia

$$m \le \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \le M$$

Dal teorema dei valori intermedi applicato a $f^{n+1}$, si ha che esiste $\xi$ per cui

$$f^{n+1}(\xi) = \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

da cui la tesi. □

### 5.2 Condizioni di convergenza

**Teorema 5.6.** *Se la funzione $f$ è derivabile infinite volte in un intervallo $(a, b)$ e se esistono due numeri reali $L$ e $M$ tali che*

$$|f^{(n)}(x)| \le ML^n \qquad \forall x \in (a, b) \quad \forall n,$$

*allora per ogni $x_0 \in (a, b)$ la funzione è sviluppabile in serie di Taylor centrata in $x_0$.*

Esempi di funzioni analitiche in $\mathbb{R}$: $e^x$, $\sin x$, $\cos x$. La dimostrazione segue dall'espressione del resto di Lagrange.

## 6 Seconda settimana di lezione

### 6.1 Esercizi:La formula del Binomio e la Formula di Eulero

Le formula di Eulero: per $x \in \mathbb{R}$, $i$ unità immaginaria.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ricordiamo la

Formula di triplicazione

$$\cos 3x + i \sin 3x = (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 =$$

$$= \cos^3 x - i\sin^3 x + 3i\cos^2 x \sin x - 3\sin^2 x \cos x.$$

Uguagliando la parte reale e la parte immaginaria dei due numeri

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x$$
$$\sin(3x) = -\sin^3 x + 3\cos^2 x \sin x$$

Più in generale si ha

**Proposizione 2.** *Si ha*

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

*Dimostrazione.*

$$\cos(nx) = \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right) = \left(\frac{(e^{ix})^n + (e^{-ix})^n}{2}\right) =$$
$$\frac{(\cos x + i\sin x)^n + (\cos x - i\sin x)^n}{2} =$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\cos^k x (i\sin x)^{n-k} + \cos^k x(-i\sin x)^{n-k}}{2} =$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(i)^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i\pi}{2}})^{n-k} + (e^{\frac{-i\pi}{2}})^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i(n-k)\pi}{2}}) + (e^{\frac{-i(n-k)\pi}{2}})}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x$$

□

**Esercizio 6.1.** *Dalla formula di Eulero, $x \in \mathbb{R}$, $i$ unità immaginaria $i^2 = -1$.*

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

*ricavare*

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni periodiche di periodo $2\pi$

**Proposizione 3.** *Si ha*

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{-\cos(n+\frac{1}{2})x + \cos\frac{x}{2}}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

*e*

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{x}{2})} + \frac{1}{2}$$

## 7 Polinomi trigonometrici

Un polinomio trigonometrico è una combinazione lineare finita di funzioni $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ e per alcuni valori di interi positivi. E' una funzione periodica di periodo $2\pi$.

$$s_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

## 8 Funzioni periodiche

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T > 0$ se

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il più piccolo numero $T$ (se esiste) si dice periodo minimo.

E' interessante osservare l'invariata per traslazione dell'integrale di una funzione periodica

$$\int_0^T f(x+y)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Cominciamo con l'osservare la seguente proprietà. Per ogni numero reale $a$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Infatti

$$\int_0^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{a+T} f(x)dx$$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = \int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x+T)dx =$$

$$\int_0^a f(x+T)dx = \int_T^{a+T} f(x)dx$$

Ne consegue

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

In più

$$\int_0^T f(x+y)dx = \int_y^{T+y} f(t)dt = \int_0^T f(x)dx$$

# 9 Serie di Fourier

Supponiamo che la successione di somme parziali $s_n(x)$ converga per ogni $x \in R$. Otteniamo la serie trigonometrica di coefficienti $a_0$, $a_k$, $b_k$.

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Data una funzione $f$ periodica di periodo $2\pi$ ci chiediamo se essa sia sviluppabile in una serie trigonometrica ossia se si possono determinare i coefficienti $a_0$ $a_k$ $b_k$ in modo che la serie converga ed abbia come somma $f(x)$.

## 9.1 Ortonormalità

Per $n = 1, 2, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots$ risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \delta_{m,n}; \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \delta_{m,n}$$

$\delta_{m,n}$ è il simbolo di Kronecker

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

Identità di Weber per $n, m \in \mathbb{N}$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\big((\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\big)$$
$$\sin(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\big((\sin((n-m)x) + \sin((n+m)x)\big)$$
$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\big((\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)\big)$$

Moltiplicando $f(x)$ per $\cos(mx)$ e $\sin(mx)$ ed integrando tra $-\pi, \pi$ si ottiene

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx$$

Le costanti sopra definite si chiamano coefficienti di Fourier di $f(x)$. La serie, una volta specificati i coefficienti, si chiama Serie di Fourier di $f(x)$.

Funzioni pari:

$$b_k = 0 \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)dx$$

Funzioni dispari:

$$a_k = 0 \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(mx)dx$$

## 9.2 Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

prolungata per periodicità I coefficienti di Fourier sono $a_0 = 1$, $a_k = 0$ $b_k = \frac{1-(-1)^k}{k\pi}$ La serie di Fourier è data da

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

**Esercizio 1** Data la funzione

$$f(x) = |x|x,$$

per $x \in [-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità in $\mathbb{R}$ determinare le serie di Fourier.

La funzione è dispari, pertanto $a_0 = 0$, $a_k = 0, \forall k \in N$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x^2 \sin kx dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{\pi}^{0} -x^2 \sin k(-x) dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx\right].$$

Risulta:

$$\int x^2 \sin kx dx = -\int x^2 \frac{1}{k}(\cos kx)' dx =$$

$$-\frac{1}{k}x^2(\cos kx) + \frac{2}{k}\int x \cos kx dx =$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx = -\frac{1}{k}x^2(\cos kx)|_0^{\pi} + \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x \cos kx dx =$$

$$= -\frac{1}{k}\pi^2(-1)^k + \frac{2}{k^2}\int_0^{\pi} x(\sin kx)' dx =$$

$$= -\frac{1}{k}\pi^2(-1)^k + \left(\frac{2}{k^3}(-1)^k - \frac{2}{k^3}\right)$$

Quindi incata $S_2$ la serie di Fourier relativa a $f$, si ha

$$S_2 = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left( -\frac{1}{k}\pi^2(-1)^k + \frac{2}{k^3}(-1)^k - \frac{2}{k^3}\right)\sin kx.$$

**Esercizio 2** Sia $c$ un parametro reale positivo e $f$ la funzione periodica di periodo $2\pi$ ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$x \in (-\pi, \pi] \to e^{\max\{\frac{1}{\pi}, c\}x}$$

Determinare la serie di Fourier di $f$ .

Se $c > \frac{1}{\pi}$, risulta $f(x) = e^{cx}$, pertanto la serie vale:

$$\frac{\sinh c\pi}{\pi c} + \frac{2}{\pi}\sinh c\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + c^2}(c\cos kx - k\sin kx).$$

Se $c \leq \frac{1}{\pi}$, risulta $f(x) = e^{\frac{1}{\pi}x}$, dunque la serie vale:

$$\sinh 1 + \frac{2}{\pi}\sinh 1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + (1/\pi^2)}(\frac{1}{\pi}\cos kx - k\sin kx).$$

**Esercizio 3** Sia $f$ la funzione periodica di periodo $2\pi$ ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ -3x, & 0 < x \leq \pi \end{cases} .$$

Determinare la serie di Fourier di $f$ .

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)\right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx, k = 0, 1, 2, ...$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier della $f$.

$$a_0 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 3xdx = -\frac{3}{2}\pi;$$

$$a_k = -\frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx = -\frac{3}{\pi}\left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right];$$

$$b_k = -\frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx = -\frac{3}{k}(-1)^{k+1} = \frac{3}{k}(-1)^k.$$

la serie di Fourier richiesta è:

$$-\frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin(kx)}{k}.$$

**Esercizio 4** Sia $f$ la funzione periodica di periodo $2\pi$ ottenuta prolungando per periodicità su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \max\{2, 2-x\}, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

Determinare la serie di Fourier di $f$.

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k\cos(kx) + b_k\mathrm{sen}(kx)\right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx, k = 0, 1, 2, ...$$

Osserviamo che:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \in (-\pi, 0) \\ 2, & x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Dunque:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2dx = \frac{\pi}{2} + 4.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)\cos(kx)dx + \int_0^{\pi} 2\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1].$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)\mathrm{sen}(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\mathrm{sen}(kx)dx = \frac{1}{k}(-1)^k.$$

La serie di Fourier richiesta è:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 4\right) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]\cos(kx) + \frac{1}{k}(-1)^k\mathrm{sen}(kx)\right].$$

Ricordiamo: se $f$ è pari allora $b_k = 0$, $\forall k$; se $f$ è dispari allora $a_k = 0$, $\forall k$; inoltre per la $2\pi$ periodicità della funzione $f$ vale

$$\int_{-\pi-a}^{\pi-a} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

per ogni $a$ numero reale.

## 9.3 Disuguaglianza di Bessel

Consideriamo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)\right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx, k = 0, 1, 2, ...$$

**Teorema 9.1.** *Sia $f : [-\pi, \pi]$ limitata e integrabile*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Dimostrare la disuguaglianza.

Dalla disuguaglianza di Bessel segue

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} b_k = 0,$$

ossia

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx = 0.$$

## 9.4 Nucleo di Dirichlet

$$d_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

Si ha

$$d_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2}))}$$

Infatti sommiamo da 1 a $n$ i due membri dell'identità trigonometrica

$$\sin((k + \frac{1}{2})x) - \sin((k - \frac{1}{2})x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(kx)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin((k+\frac{1}{2})x)-\sin((k-\frac{1}{2})x))=\sin((n+\frac{1}{2})x)-\sin(\frac{x}{2})$$

Inoltre

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d_n(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Segue da $d_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$ ed effettuando l'integrazione.

## 9.5 Formula di Dirichlet

**Teorema 9.2.** *Sia $f$ periodica di periodo $2\pi$ integrabile in $[-\pi,\pi]$. La somma parziale $s_n(x)$ della serie di Fourier di $f$ si può esprimere in termini del nucleo di Dirichlet (integrale di convoluzione)*

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)d_n(t)dt,$$

*ove*

$$d_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

La dimostrazione è basata sul seguente calcolo. Per definizione di $s_n(x)$

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos(kx)\cos(ky)+\sin(kx)\sin(ky))dy] =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos(k(x-y))]dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos(kt)]dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}dt$$

## 9.6 Teorema di Convergenza Puntuale

**Definizione 9.3.** *Data una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diciamo che $f$ è regolare a tratti in $[a,b]$ se esistono un numero finito di punti $x_i$, $i=0,1,2,\ldots,N$ con $a_0=x_0=x_1<x_1<x_2\cdots<x_N=b$ tali che $f$ è derivabile con derivata continua in ogni intervallo $(x_i,x_{i+1})$, e la restrizione di $f'$ a $(x_i,x_{i+1})$ è prolungabile con continuità in $[x_i,x_{i+1}]$. Se la funzione $f$ è definita su $\mathbb{R}$, allora diciamo $f$ è regolare a tratti in $\mathbb{R}$ se è regolare a tratti in ogni intervallo [a,b] contenuto in $\mathbb{R}$.*

**Convergenza Puntuale** Per ogni $x$ reale la successione $s_n(x)$ converge a $f(x)$. ovvero perogni $x\in\mathbb{R}$ e per ogni $\epsilon>0$ esiste un indice $N(x.\epsilon)$ the che

$$|s_n(x)-f(x)|<\epsilon \quad \forall N > N(x,\epsilon)$$

**Teorema 9.4.** *Sia $f$ una funzione periodica regolare a tratti su $\mathbb{R}$. Per ogni $x$ reale la serie di Fourier converge alla media aritmetica tra il limite destro e il limite sinistro:*

$$\frac{1}{2}\Big[f(x_+)+f(x_-)\Big],$$

*e a $f(x)$ nei punti di continuità.*

Dobbiamo considerare

$$s_n(x) - \frac{1}{2}\Big[f(x_+) + f(x_-)\Big] = \frac{1}{\pi}[\int_0^\pi (f(x+t) - f(x_+))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt +$$

$$\int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x_-))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{x}{2})}dt,$$

Poniamo

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)-f(x_+)}{2\sin(\frac{t}{2})} & 0 < t \leq \pi \\ 0 & t = 0 \\ \frac{f(x+t)-f(x_-)}{2\sin(\frac{t}{2})} & -\pi < t \leq 0 \end{cases}$$

Ne segue dalle ipotesi su $f$ che esiste il limite per $t \to 0^+$ e per $t \to 0^-$ di F. Infatti

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = f'_+(x) \qquad \lim_{t\to 0^-} F(t) = f'_-(x)$$

F è continua a tratti in $[-\pi, \pi]$, dunque integrabile e limitata. Inoltre

$$s_n(x) - \frac{1}{2}\Big[f(x_+) + f(x_-)\Big] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt.$$

Del resto

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos\frac{t}{2}\sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin\frac{t}{2}\cos(nt)dt$$

Dalla disuguaglianza di Bessel si deduce che

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin\frac{t}{2}\cos(nt)dt \to 0$$

per $n \to +\infty$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos\frac{t}{2}\sin(nt)dt \to 0$$

per $n \to +\infty$.

In conclusione

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt \to 0,$$

per $n \to +\infty$.

### 9.7 Esercizio

Sia $f$ la funzione periodica di periodo $2\pi$ ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ -3x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$-\frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k \sin(kx)}{k}.$$

Poichè $f$ è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ distinti da $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier la serie converge ad $f$ in tali punti. Notiamo che, se $x = \pi$, la serie si riduce a :

$$-\frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Poiché

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{8}\pi^2,$$

questa somma vale:

$$\frac{f(\pi_+) + f(\pi_-)}{2} = -\frac{3\pi}{2}.$$

## 10 Terza settimana: Serie di Fourier in forma complessa

Data

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt} = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k \cos(kx) + i\gamma_k \sin(kx)) + \gamma_{-k}\cos(-kx) + i\gamma_k \sin(-kx)) =$$

$$\gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k + \gamma_{-k})\cos(kx) + i(\gamma_k - \gamma_{-k})\sin(kx)$$

$$\gamma_0 = a_0/2$$

$$\gamma_k + \gamma_{-k} = a_k$$

$$i(\gamma_k - \gamma_{-k}) = b_k$$

e

$$\gamma_k + \gamma_{-k} = a_k$$

$$\gamma_k - \gamma_{-k} = -ib_k$$

Sommando

$$\gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

Sottraendo

$$\gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

E' utile scrivere la serie di Fourier nella forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

Risulta per $n \neq m$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

In conclusione

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \delta_{n,m}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

### 10.1 Serie di Fourier per funzioni periodiche di periodo $T \neq 2\pi$.

Sia $f$ periodica di periodo $T \neq 2\pi$. Consideriamo $\tilde{f}(\tau) = f(\frac{T\tau}{2\pi})$, allora $\tilde{f}$ è periodica di periodo $2\pi$.

La serie di Fourier di $\tilde{f}$ è data da

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\tau) + b_k \sin(k\tau)$$

La serie di Fourier di $f$ risulta ($t := \frac{T\tau}{2\pi}$)

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{2k\pi}{T}t) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{T}t)$$

i cui coefficienti sono

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\tau)\cos(k\tau)d\tau = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\frac{2k\pi}{T}t)dt$$

$k = 0, 1 \ldots$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\tau)\sin(k\tau)d\tau = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\frac{2k\pi}{T}t)dt$$

$k = 1 \ldots$

### 10.2 Topologia in $\mathbb{R}^2$, punti interni, esterni, e di frontiera. Insiemi aperti, chiusi, chiusura di un insieme, domini. Funzioni di due variabili, nozione di limite

Argomenti di teoria *vedere libro*

## 10.3 Esercizio.

Calcolare l'insieme di definizione delle funzioni

$$f(x,y) = \ln(2 - x^2 + y^2)$$

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$$

$$f(x,y) = \ln(1 - x^2) + \ln(1 - y^2)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 4}$$

$$f(x,y) = \sqrt{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}$$

## 10.4 Esercizio.

Verificare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

## 10.5 Esercizio.

Esempio di funzione che non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$ anche se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx) = 0$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Si ha

$$f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{mx}{1 + m^4x^2},$$

quindi

$$\lim_{(x,y=mx)\to(0,0)} f(x,mx) = 0.$$

Mentre

$$f(y^2,y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2},$$

quindi

$$\lim_{(x=y^2,y)\to(0,0)} f(y^2,y) = \frac{1}{2}.$$

### 10.6 Continuità, Derivate parziali, Derivabilità

### 10.7 Esercizio.

Calcolare $f_x$ $f_y$ ove definite

$$f(x,y) = x + y$$

$$f(x,y) = xy$$

$$f(x,y) = \frac{x}{y}$$

$$f(x,y) = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$f(x,y) = \sqrt{(x^2 + 4)}$$

$$f(x,y) = \sin{(xy)}$$

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}{(xy)}$$

$$f(x,y) = \ln{(xy)}$$

$$f(x,y) = \ln{(x + y)}$$

$$f(x,y) = \pi^{xy}$$

### 10.8 Esercizio.

Calcolare la matrice hessiana

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

Una funzione si dice armonica in un aperto $A$ di $\mathbb{R}^2$ se ammette derivate seconde $f_{xx}$ $f_{yy}$ che verificano l'equazione di Laplace

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

Argomenti di teoria *vedere libro*

### 10.9 Esercizi

Verificare che le le seguenti funzioni sono armoniche

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$$

## 11 Quarta settimana

Teorema di Schwarz con dimostrazione (vedere libro)

Differenziabilità (vedere libro). Esempio di una funzione che ammette derivate parziali in $(0,0)$ ma non è continua in $(0,0)$. La differenziabilità implica la continuità

Notazione $f \in C^k(A)$: f è dotata di derivate parziali prime continue.

### 11.1 Lezione 2/4

Teorema del differenziale *vedere libro*

### 11.2 Gerarchia degli spazi nel caso reale

Dal teorema del differenziale

$$C^0(A) \supset C^1(A) \supset C^2(A) \supset C^3(A) \cdots \supset C^\infty(A)$$

Ricordiamo

La funzione $\sin x$ è derivabile di ogni ordine in ogni punto di $\mathbb{R}$. $\sin x \in C^\infty(\mathbb{R})$, ed è una funzione analitica.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile di ogni ordine in ogni punto di $\mathbb{R}$. ma non è una funzione analitica perché la serie di Taylor ad essa relativa vale 0 e

$$f(x) \neq 0$$

## 12 Funzioni analitiche in senso complesso

Consideriamo degli insiemi particolari

- $\mathbb{C}$
- Sottoinsiemi aperti del piano complesso disco aperto $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$

$$(x, y) \qquad z = x + iy.$$

La parte reale di $z$, $\Re z = x$ e la parte immaginaria di $z$, $\Im z = y$ è esprimibile in termini di $z$ e del suo coniugato $\overline{z} = x - iy$

$$x = (z + \overline{z})/2 \qquad y = (z + \overline{z})/(2i)$$

### 12.1 Funzioni complesse

Consideriamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$$

Interpretiamo come funzione complessa

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Esempio

$$u(x, y) = x \qquad v(x, y) = -y$$

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to \overline{z}$$

Esempio

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \qquad v(x, y) = 0$$
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to \overline{z}z$$

Esempio

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \qquad v(x, y) = 2xy$$
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to z^2$$

Esempi di funzioni complesse

$$z^k = (x + iy)^k$$
$$\overline{z} = x - iy$$
$$z\overline{z} = x^2 + y^2$$

La serie geometrica (per $|z| < 1$)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k.$$

## 12.2 Esponenziale complesso

.

Abbiamo definito l'esponenziale complesso

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

La scrittura permette di trattare agevolmente l'esponenziale complesso nella forma

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$
$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

In questo modo

$$e^z = u(x, y) + iv(x, y),$$

con

$$u(x, y) = e^x \cos y \qquad v(x, y) = e^x \sin y$$
$$|e^z| = e^x$$

Vale per $z, w \in \mathbb{C}$

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

- Vale inoltre

$$e^{-iy} = \overline{e^{iy}}$$

La funzione esponenziale ha nel piano complesso ha la proprietà di essere periodica di periodo $2\pi i$.

$$e^z = e^{x+iy} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^{z+2\pi i}$$

### 12.3 Logaritmo complesso.

Possiamo dare la definizione di logaritmo di un numero complesso $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Sia $z \neq 0$. $\ln z$ sono quei numeri $\omega = x + iy$ tali $e^{\omega} = z$.

Si ricava

$$e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \iff x = \ln r \quad y = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto ogni numero complesso non nullo ha infiniti logaritmi

$$\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

Logaritmo principale

$$\arg z \in (-\pi, \pi], \quad k = 0$$

Possiamo ora definire $z^{\alpha}$ con $\alpha$ reale o complesso.

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z}$$

esempio:

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i(i(\arg i + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$$

Tutti i valori sono numeri reali.

### 12.4 Funzioni Trigonometriche e Iperboliche

Per $z \in C$ definiamo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Esercizio. Calcolare $|\sin(z)|^2$, $|\cos(z)|^2$.

Inoltre

$$\cos hz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sin hz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Esercizi sulle due nozioni.

#### 12.4.1 Derivata di funzioni complesse.

Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se esiste finito il limite del rapporto incrementale (inteso come quoziente di numeri complessi)

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

dove il rapporto si può scrivere:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$i\frac{v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}$$

Assumiamo ora che la $f(z)=u(x,y)+iw(x,y)$ sia derivabile in $\mathbb{C}$. Sia $z_0\in\mathbb{C}$.

$$(\Delta x,0)\to(0,0)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+i\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

$$(0,\Delta y)\to(0,0)$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+i\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y}+i\frac{v(x_0,y_0+i\Delta y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y}=\frac{u_y(x_0,y_0)}{i}+v_y(x_0,y_0)$$

Uguagliando i limiti, deduciamo le Condizioni di Cauchy- Riemann

$$\begin{cases}u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\\u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)\end{cases}$$

Vale il viceversa

Siano $u(x,y)$ e $v(x,y)$ due funzioni di classe $C^1$. Definiamo

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Se $u$ e$v$ soddisfano le condizioni di Cauchy Riemann allora $f$ è derivabile.

Esempio di funzione olomorfa in $\mathbb{C}$: $f(z)=e^z$, $f(z)=\cos z$, $f(z)=\sin z$, $f(z)=z^n$

$$D(z^n)=nz^{n-1},\ n\in\mathbb{N},\ D(e^z)=e^z,\ \ D(\cos z)=-\sin z,\ D(\sin z)=\cos z$$

Esempio

$$e^z=u(x,y)+iv(x,y)$$
$$u(x,y)=e^x\cos y$$
$$v(x,y)=e^x\sin y$$
$$u_x=e^x\cos y=v_y$$
$$u_y=-e^x\sin y=-v_x$$

La funzione $f(z)=\overline{z}$ non è olomorfa in $\mathbb{C}$. Infatti non sono verificate le condizioni di Cauchy-Riemann.

Da

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0),$$

ricavare la derivata complessa delle funzioni elementari.

$$D(e^z)=e^z,\ \ D(\cos z)=-\sin z,\ D(\sin z)=\cos z$$

# 13 Quinta settimana

## 13.1 1/5

prime nozioni sulle curve (definizione, sostegno, curva semplice, curva chiusa, esempi e grafici) *vedere libro*

derivata di una funzione composta (dimostrazione) *vedere libro* nozione di derivata direzionale *vedere libro*.

## 13.2 2/5

Significato geometrico del gradiente. Insiemi connessi. Funzioni nulle in un insieme connesso. Applicazione del teorema:

$$\arctan\frac{x}{y} + \arctan\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad x > 0,\ y > 0$$

Formula di Taylor con il resto di Lagrange (dimostrazione)

## 13.3 3/5

Formula di Taylor con il resto di Peano (dimostrazione). Applicazione allo studio di massimi e minimi relativi per funzioni di due variabili

Forme quadratiche

$$ah^2 + 2bhk + ck^2$$

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \tag{1}$$

## 13.4 Forme quadratiche in $\mathbb{R}^2$ e la matrice Hessiana

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \tag{2}$$

Una matrice $Q$ si dice *non negativa* (rispettivamente, *non positiva* ) se la forma $w^T Qw$ o $Qw \cdot w$ ($w = (h, k) \in \mathbb{R}^2$) is semidefinita positiva (rispettivamente negativa) cioè se

$$w^T Qw = ah^2 + 2bhk + ck^2 \geq 0$$

$$\text{(rispettivamente, } w^T Qw \leq 0, )\, \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2,$$

ed esiste $z$ non nullo per cui $w^T Qw = 0$. Una matrice $Q$ si dice *positiva* (rispettivamente, *negativa*) se la forma $z^T Qz$ è *positiva* (rispettivamente, *negativa*)

$$w^T Qw = ah^2 + 2bhk + ck^2 > 0 \ (w^T Qw < 0) \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2,\ (h, k) \neq 0.$$

Indefinita se esistono $w_1$ e $w_2$ tali che $w_1^T Qw_1 > 0$, $w_2^T Qw_2 < 0$.

**Esempio 13.1.** *Un esempio di matrice positiva è data da*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

*poichè* $h^2 + k^2 > 0 \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, h,k \neq 0$*. Un esempio di matrice non negativa è data da*

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

*poichè* $2h^2 \geq 0 \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$*, potendo essere nulla nei punti* $(0,k)$*.*

Una matrice indefinita è data da

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

poichè $h^2 - 2k^2$ in $(1,1)$ è negativa, e in $(2,1)$ è positiva.

Abbiamo il seguente

**Teorema 13.2.** *Sia*

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$|Q| = \text{det}Q = ac - b^2.$$

*Allora*

$$|Q| > 0 \quad \text{e } a > 0, \iff Q > 0$$

$$|Q| > 0 \quad \text{e } a < 0, \iff Q < 0$$

*Se* detQ $< 0$*, allora* $Q$ *è indefinita.*

*Dimostrazione.* Data la forma quadratica

$$ah^2 + 2bhk + ck^2,$$

essa può essere equivalentemente scritta

$$a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}k^2,$$

da questa formula si evince chiaramente il risultato, perché abbiamo una quantità

$$\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 \geq 0$$

e $ac - b^2$ è il determinante di $Q$, assumendo $detQ > 0$ allora se $a > 0$ risulterà

$$a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}k^2 > 0,$$

mentre se $a < 0$

$$a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}k^2 < 0,$$

□

# 14 Massimi e minimi interni per funzioni $C^2$

$A \subset \mathbb{R}^2$

*Teorema di Fermat.*

**Teorema 14.1** (Fermat)**.** *$(x_0, y_0)$ interno a $A$. Se $(x_0, y_0)$ è un punto di estremo locale per $f$ (minimo o massimo locale), e $f$ ammette derivate parziali in $(x_0, y_0)$ allora*

$$Df(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) = (0, 0).$$

Se$f \in C^2(A)$ ossia ammette derivate parziali seconde continue in $A$, possiamo associare a $f$ la sua *matrice Hessiana*

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \tag{7}$$

e il determinante della matrice Hessiana, è dato da

$$|H| = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

**Teorema 14.2** (Condizioni sufficienti del secondo ordine)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ e $f \in C^2(A)$. Se $(x_0, y_0) \in$ è in $A$ e*

$$Df(x_0, y_0) = 0$$

$$D^2 f(x_0, y_0) > 0, \qquad \textit{(rispettivamente } D^2 f(x_0, y_0) < 0\textit{)}$$

*allora $(x_0, y_0)$è un punto di minimo locale di $f$ in $A$. (rispettivamente massimo locale).*

Osserviamo che
$detH(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \iff D^2 f(x_0, y_0) > 0$
$detH(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \iff D^2 f(x_0, y_0) < 0$
Esempio.

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

# 15 6

## 15.1 6.2

Calcolo di massimi e minimi relativi

- $$f(x, y) = x^2 + y^2$$
- $$f(x, y) = -x^2 - y^2$$
- $$f(x, y) = x^2 - y^2$$
- $$f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$$

- $$f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$$
- $$f(x,y) = -\sin x \sin(2y)$$

Calcolo di massimi e minimi di funzioni continue in semplici insieme chiusi e limitati (cerchio, ellisse, quadrato, rettangolo, triangolo). Esempio.

### 15.2 6.3.1

Coordinate polari.

Vale la formula di derivazione della funzione composta anche quando $x$ e $y$ sono a loro volta funzione di due variabili reali.

$$(\rho,\theta) \to (x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Se le funzioni $x = x(\rho,\theta)$ e $y = y(\rho,\theta)$ sono derivabili e $f$ è differenziabile vale

$$f_\rho(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) = f_x(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))x_\rho + f_y(\rho,\theta), y(\rho,\theta))y_\rho$$

$$f_\theta(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) = f_x(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))x_\theta + f_y(\rho,\theta), y(\rho,\theta))y_\theta$$

Applichiamo la derivazione al caso di coordinate polari

$$f_\rho = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta$$

$$f_\theta = -f_x\rho\sin\theta + f_y\rho\cos\theta.$$

Si ricava $f_x^2 + f_y^2 = f_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}f_\theta^2$ In caso di regolarità $C^2$ possiamo calcolare

$$f_{\rho\rho}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) = f_\rho(f_x(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))x_\rho) + f_y(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))y_\rho) =$$

$$f_{xx}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))(x_\rho)^2 + f_{xy}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))x_\rho y_\rho + f_x(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))x_{\rho\rho} +$$

$$f_{yx}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))y_\rho x_\rho + f_{yy}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)(y_\rho)^2 + f_y(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))y_{\rho\rho} =$$

Nel caso $x_{\rho\rho} = y_{\rho\rho} = 0$

$$f_{xx}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)(x_\rho)^2 + 2f_{xy}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))x_\rho y_\rho + f_{yy}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))(y_\rho)^2$$

$$polari \;\; f_{\rho\rho} = f_{xx}(\cos\theta)^2 + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}(\sin\theta)^2$$

$$f_{\theta\theta}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) = f_{xx}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))(x_\theta)^2 + f_{xy}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))x_\theta y_\theta + f_{yy}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))(y_\theta)^2 +$$

$$f_x(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))x_{\theta\theta} + f_y(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))y_{\theta\theta}$$

$$polari \;\; f_{\theta\theta} = f_{xx}\rho^2\sin^2\theta - 2f_{xy}\rho^2\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\rho^2\cos^2 + \theta - f_x\rho\cos\theta - f_y\rho\sin\theta$$

$$\frac{1}{\rho^2} f_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho} f_\rho = f_{xx} \sin^2\theta - 2 f_{xy} \cos\theta \sin\theta + f_{yy} \cos^2\theta$$

Da cui

$$\frac{1}{\rho^2} f_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho} f_\rho + f_{\rho\rho} = f_{xx} + f_{yy}$$

Definizione. Equazione polare. Versore tangente. Condizione di regolarità caso polare. Esempi. Spirale logaritmica. Cardiode. Circonferenze.*vedere libro*

# 16 7

## 16.1 7.1

Lunghezza di una curva. Curve equivalenti. Curve orientate.

## 16.2 7.1.1

Lunghezza di una curva.

Esempio di curva: segmento di estremi $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$.

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) & t \in [0,1] \\ y = x_0 + t(x_1 - x_0) \end{cases}$$

In questo caso (segmento di estremi $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$) la lunghezza della curva è data da

$$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Data la curva $\phi$

$$\begin{cases} x = x(t) & t \in [a,b] \\ y = y(t) \end{cases}$$

In generale possiamo suddividere l'intervallo $[a,b]$ dove varia il parametro $t$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b.$$

Se indichiamo con $S$ la suddivisione

$$L(\phi, S) = \sum_{k=1}^{k} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$

Poniamo

$$L(\phi) = \sup_{S \in \mathcal{S}} L(S)$$

Se $\phi \in C^1$

$$L(\phi) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

proprietà*vedere libro* Lunghezza della curva data dal grafico di funzione.

1. Arco di parabola

$$y = \frac{1}{2}x^2 \;\; x \in [0, a]$$

$$L(\phi) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

Occorre ricordare

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(sett\sinh x + x\sqrt{1+x^2}) + c$$

$$sett\sinh x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Si pone $x = \sinh t$. Si ottiene

$$\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2}(\sinh t \cosh t + t) + c$$

Si procede alla sostituzione $t = sett\sinh x$

$$\int_0^a \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(a\sqrt{1+a^2} + sett\sinh a)$$

2. Circonferenza di centro l'origine e raggio $r$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = r\sin(t) \end{cases}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = 2\pi r$$

2. Cardiode

$$\rho = a(1 + \cos(\theta)) \;\; \theta \in [0, 2\pi] \;\; a > 0$$

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta$$

$$L = 4a\int_0^{\pi} |\cos t|dt = 8a\int_0^{\pi/2} \cos t dt = 8a$$

3. Spirale Logaritmica

$$\rho = e^{-b\theta}, \;\; \theta \in [0, 2k\pi] \;\; k \in \mathbb{N}, \quad b > 0$$

$$L = \int_0^{2k\pi} \sqrt{e^{-b\theta} + b^2 e^{-b\theta}}d\theta = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}(1 - e^{-2\pi kb})$$

per $k \to +\infty$ otteniamo

$$\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}$$

(lunghezza dell'intera spirale) 4. Spirale di Archimede

$$\rho = a + b\theta \;\; \theta \in [0, 2k\pi]\,,\; k \in \mathbb{N},\, a = 0,\, b > 0$$
$$L = \int_0^{2k\pi} \sqrt{b^2 + b^2\theta^2}d\theta = b\int_0^{2k\pi} \sqrt{1+\theta^2}d\theta =$$
$$b\int_0^{2k\pi/b} \sqrt{1+t^2}dt = \frac{b}{2}\bigg( \ln(2k\pi + \sqrt{1+4k^2\pi^2}) + 2k\pi\sqrt{1+4k^2\pi^2}\bigg)$$

5. Asteroide

$$\begin{cases} x = \cos^3(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$$

Calcolare la lunghezza ($L = 6$) 6. Asteroide. $a > 0$

$$\begin{cases} x = a\cos^3(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = a\sin^3(t) \end{cases}$$

Calcolare la lunghezza ($L = 6a$) 7. Esercizio

$$\begin{cases} x = e^t\cos(t) & t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ y = e^t\sin(t) \end{cases}$$

Calcolare la lunghezza ($L = \sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{4}-1})$

8. Arco di Ellisse (I quadrante) $a > 0$, $b > 0$ con $a > b$

$$\begin{cases} x = a\cos(t) & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y = b\sin(t) \end{cases}$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}d\theta =$$

Poniamo $k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$. Osserviamo che grazie alla sostituzione $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ e la situazione $t = \frac{\pi}{2} - s$ si ottiene un integrale ellittico che andremo a risolvere per serie.

$$a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}d\theta$$

Ricordiamo se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

ove

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Si avrà

$$(1-k^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\binom{\frac{1}{2}}{j}k^{2j}\sin^{2j}\theta =$$

$$1+\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j\binom{\frac{1}{2}}{j}k^{2j}\sin^{2j}\theta =$$

Osserviamo

$$\binom{\frac{1}{2}}{j} = (-1)^{j-1}\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2j-3}{2}}{j!} = (-1)^{j-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2j-3)}{2^j j!} = (-1)^{j-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2j-3)}{2j2(j-1)2(j-2)\ldots 2}$$

$$= (-1)^{j-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2j-3)}{(2j)!!} = (-1)^{j-1}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}$$

ove $n!!$ indica
se $n$ è dispari il prodotto di tutti i dispari tra 1 e $n$,
se $n$ è pari il prodotto di tutti i pari tra 2 e $n$.

$$(1-k^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} =$$

$$a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta = a\left(1-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}k^{2j}\int_0^{\pi/2}\sin^{2j}\theta d\theta\right)$$

Dimostriamo

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2j}\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}$$

Per $j=1$ è verificata (scrivere in dettaglio).
Assumendo

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2j}\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}$$

dimostreremo

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2(j+1)}\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!}$$

Infatti

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2j+1}\theta\sin\theta d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^{2j+1}\theta(-\cos\theta)'d\theta$$

$$=\sin^{2j+1}\theta(-\cos\theta)|_0^{\pi/2}+(2j+1)\int_0^{\pi/2}\sin^{2j}\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=(2j+1)\int_0^{\pi/2}\sin^{2j}\theta(1-\sin^2\theta)d\theta = (2j+1)\int_0^{\pi/2}\sin^{2j}\theta d\theta-(2j+1)\int_0^{\pi/2}\sin^{2j+2}\theta d\theta$$

$$(2j+2)\int_0^{\pi/2}\sin^{2j+2}\theta d\theta = (2j+1)\int_0^{\pi/2}\sin^{2j}\theta d\theta$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2j+2}\theta d\theta = \frac{(2j+1)}{(2j+2)}\frac{\pi}{2}\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} = \frac{\pi}{2}\frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!}$$

In conclusione

$$L = a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta = a\frac{\pi}{2}\left(1-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2j-1}\left(\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}k^j\right)^2\right)$$

## 16.3 Curve equivalenti. Orientamento

Esempio circonferenza

$$\begin{cases} x = \cos(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = \sin(t) \end{cases}$$

Esempio circonferenza

$$\begin{cases} x = \cos(2t) & t \in [0, \pi] \\ y = \sin(2t) \end{cases}$$

Curve equivalenti. Due curve $\phi_1$ e $\phi_2$ si dicono equivalenti se esiste un'applicazione $g : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ di classe $C^1$ tale che $g'(t) \neq 0$ $\forall t \in [a, b]$ e

$$\phi_1(t) = \phi_2(g(t)).$$

Esempio di prima $g : [0, 2\pi] \to [0, \pi]$ $t \to g(t) = \frac{t}{2}$ Due curve equivalenti non inducono necessariamente lo stesso orientamento Poniamo $\tau = -t$

$$\begin{cases} x = \cos(\tau) & \tau \in [-2\pi, 0] \\ y = -\sin(\tau) \end{cases}$$

Si tratta della stessa curva percorsa in senso inverso ($-C$). La curva

$$\begin{cases} x = \sin(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = \cos(t) \end{cases}$$

ha lo stesso verso di percorrenza di $-C$.

*La lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione e non dipende dall'orientamento*.

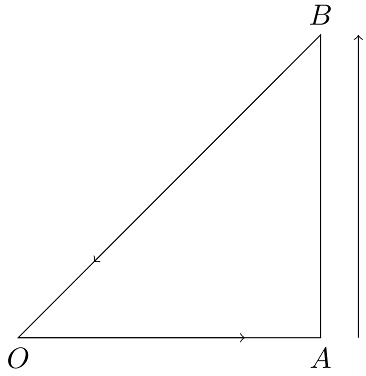
$$L(\phi) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

$\phi_1$,$\phi_2$, $\phi_3$, $\phi_4$ curve precedentemente definite.

$$L(\phi_1) = L(\phi_2) = L(\phi_3) = L(\phi_4) = 2\pi$$

*Dimostrazione generale*.

## 16.4 Esercizio




Curve regolare a tratti.

Scrivere l'equazione parametrica della curva regolare a tratti rappresentata dal triangolo percorso in senso antiorario. A $\rightarrow$ B

$$\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

B $\rightarrow$ O

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = 1 - t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

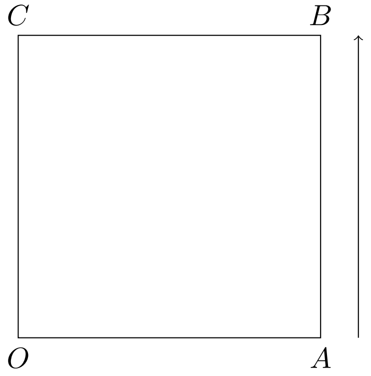
O $\rightarrow$ A

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

La cura può essere descritta

$$\gamma = \begin{cases} \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \end{cases} \qquad t \in [0,1] \\ \\ \begin{cases} x(t) = 2 - t \\ y(t) = 2 - t \end{cases} \qquad t \in [1,2] \\ \\ \begin{cases} x(t) = t - 2 \\ y(t) = 0 \end{cases} \qquad t \in [2,3] \\ \end{cases}$$

## 16.5 Esercizio




Curve regolare a tratti.

Scrivere l'equazione parametrica della curva regolare a tratti rappresentata dal triangolo percorso in senso antiorario. A $\to$ B

$$\begin{cases} x(t) = 1 & t \in [0,1] \\ y(t) = t \end{cases}$$

B $\to$ C

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t & t \in [0,1] \\ y(t) = 1 \end{cases}$$

C $\to$ O

$$\begin{cases} x(t) = 0 & t \in [0,1] \\ y(t) = 1 - t \end{cases}$$

O $\to$ A

$$\begin{cases} x(t) = t & t \in [0,1] \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

La cura può essere descritta

$$\gamma = \begin{cases} \begin{cases} x(t) = 1 & t \in [0,1] \\ y(t) = t \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x(t) = 2 - t & t \in [1,2] \\ y(t) = 1 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x(t) = 0 & t \in [2,3] \\ y(t) = 3 - t \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x(t) = t - 3 & t \in [3,4] \\ y(t) = 0 \end{cases} \\ \end{cases}$$

Si dice che il punto $P_1 = \phi(t_1)$ precede il punto $P_2 = \phi(t_2)$ nel verso indotto dal parametro $t$ se $t_1 < t_2$.

Ascissa curvilinea o lunghezza d'arco di una curva regolare.

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad \forall t \in [a, b]$$

funzione crescente, derivabile, con derivata positiva.

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Scriviamo la curva

$$\begin{cases} x = r\cos(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = r\sin(t) \end{cases}$$

tramite l'ascissa curvilinea $t_0 = 0$

$$s(t) = \int_0^t r d\tau = rt$$

quindi $t = \frac{s}{r}$ con $s \in [0, 2\pi r]$.

$$\begin{cases} x = r\cos(\frac{s}{r}) & s \in [0, 2r\pi] \\ y = r\sin(\frac{s}{r}) \end{cases}$$

Integrale curvilineo di una funzione*vedere libro*.

$$\int_\gamma f ds$$

Sia $\gamma$ una curva regolare e sia $\phi$ la sua rappresentazione parametrica. Sia $f$ una funzione reale di due variabili reali definita e continua sul sostegno $\phi([a, b])$

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

## 16.6 Esempio

$$\begin{cases} x = t & t \in [1, e] \\ y = t\ln t \end{cases}$$

$$\int_1^2 \sqrt{1 + (\ln t + 1)^2} dt > 0$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x}$$

Calcoliamo

$$\int_1^e \frac{1}{t}\sqrt{1+(\ln t+1)^2}dt =$$

$\tau = \ln t + 1$, $d\tau = \frac{1}{t}dt$,

$$\int_1^e \frac{1}{t}\sqrt{1+(\ln t+1)^2}dt = \int_1^2 \sqrt{1+(\tau)^2}d\tau =$$

Ricordiamo

$$\int \sqrt{1+\tau^2}d\tau = \frac{1}{2}(sett\sinh\tau + \tau\sqrt{1+\tau^2}) + c$$

$$sett\sinh = \ln(\tau+\sqrt{1+\tau^2}).$$

$$\int_1^2 \sqrt{1+(\tau)^2}d\tau = \frac{1}{2}(\ln(\tau+\sqrt{1+\tau^2}) + \tau\sqrt{1+\tau^2})|_1^2 =$$

$$\frac{1}{2}(\ln(2+\sqrt{5}) + 2\sqrt{5} - \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2})$$

Calcolo del baricentro per curve semplici, regolari a tratti.

$$x_0 = \frac{1}{L}\int_\gamma xds, \qquad y_0 = \frac{1}{L}\int_\gamma yds$$

Asteroide

$$\begin{cases} x = \cos^3(t) & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$$

$L = \frac{3}{2}$. Calcolare il baricentro.

$$x_0 = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^4 t \sin dt = \frac{2}{5}$$

$$y_0 = \frac{2}{5}$$

Integrale curvilineo

$$\begin{cases} x = a\cos(t) & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y = b\sin(t) \end{cases}$$

$$f(x,y) = xy$$

$$I = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta}d\theta = ab\int_0^1 z\sqrt{b^2+(a^2-b^2)z^2}dz$$

$$= ab\left[\frac{1}{3(a^2-b^2)}(b^2+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = ab(a^2+ab+b^2)\frac{1}{3(a+b)}$$

$(z = \sin\theta)$