Analisi Matematica II V parte

Spirale: curva che si avvolge attorno a un determinato punto centrale avvicinandosi o allontanandosi progressivamente, a seconda di come si percorre la curva.

Spirale Logaritmica

$$\rho = e^{-b\theta}, \;\; \theta \in [0, 2k\pi] \;\; k \in \mathbb{N}, \quad b > 0$$

$$L = \int_0^{2k\pi} \sqrt{e^{-2b\theta} + b^2 e^{-2b\theta}} d\theta = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}(1 - e^{-2\pi kb})$$

Spirale di Archimede

$$\rho = a + b\theta \;\; \theta \in [0, 2k\pi]\,, \;\; k \in \mathbb{N},\; a = 0,\; b > 0$$

$$L = \int_0^{2k\pi} \sqrt{b^2 + b^2\theta^2}\, d\theta = b \int_0^{2k\pi} \sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta =$$

$$\frac{b}{2}\left(\ln(2k\pi + \sqrt{1 + 4k^2\pi^2}) + 2k\pi\sqrt{1 + 4k^2\pi^2} \right)$$

- Una curva si dice regolare a tratti se $I = [a, b]$ si può suddividere nell'unione di un numero finito di intervalli su ciascuno dei quali la curva risulta regolare.
- Curve equivalenti
  Parametrizzazioni equivalenti: esempio

  $$\varphi = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi], \quad \psi(s) = (\cos(2s), \sin(2s)), s \in [0, \pi]$$

  sono due parametrizzazioni diverse della circonferenza di centro l'origine e raggio unitario percorse nello stesso verso (curve equivalenti).
  Definizione. Due curve φ e ψ definite rispettivamente in $I = [a, b]$ e $I' = [\alpha, \beta]$ a valori in $\mathbb{R}^2$ si dicono **equivalenti** se esiste un'applicazione

  $$g : [a, b] \to [\alpha, \beta],$$

  di classe C^1 tale che $g'(t) \neq 0, \ \forall t \in [a, b]$

esempio $\varphi(t) = \psi(g(t)) = \psi(\frac{t}{2})$

- Curve orientate.
  Una curva orientata positivamente: curva piana semplice e chiusa tale che muovendosi sulla curva abbiamo l'interno alla nostra sinistra. Se scambiamo la sinistra con la destra otteniamo una curva orientata negativamente.
  Integrale curvilineo di una funzione. La funzione f è definita sul sostegno della curva ed è ivi continua.

$$\int_{\varphi} f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

  L'integrale curvilineo è invariante per parametrizzazioni equivalenti ed anche per cambiamento di orientazione sulla curva

Proprietà dell'integrale curvilineo di una funzione

- φ curva regolare Γ sostegno della curva f, g funzioni continue definite in Γ a valori reali Per α e β reali

$$\int_\varphi \alpha f + \beta g \, ds = \alpha \int_\varphi f \, ds + \beta \int_\varphi g \, ds$$

- Se $f \leq g \quad$ su Γ

$$\int_\varphi f \, ds \leq \int_\varphi g \, ds$$

- $$|\int_\varphi f \, ds| \leq \int_\varphi |f| ds \leq \max_\Gamma |f| L(\varphi)$$

- Se φ si spezza nell'unione di curve regolari φ_1 e φ_2 con $\varphi_1 : [a, c] \to \mathbb{R}$ e $\varphi_2 : [c, b] \to \mathbb{R}$ con $a < c < b$ allora

$$\int_\varphi f \, ds = \int_{\varphi_1} f \, ds + \int_{\varphi_2} f \, ds$$

Esempio di integrale curvilineo: calcolo del baricentro. φ curva semplice regolare a tratti.

$$x_0 = \frac{1}{L(\varphi)} \int_a^b x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$y_0 = \frac{1}{L(\varphi)} \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Asteroide in $[0, \frac{\pi}{2}]$, la lunghezza vale $\frac{3}{2}$

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \frac{3}{2} |\sin(2t)|$$

$$x_0 = \frac{1}{L(\varphi)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt =$$

$$\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos^3(t) \cos(t) \sin(t) dt = -\frac{2}{5} \cos^5(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}$$

Calcolare y_0

Teorema di Guldino: (Area della superficie generata da rotazioni) L'area della superficie generata dalla rotazione di un angolo α di una curva regolare φ è data dalla lunghezza della curva moltiplicata per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto nella rotazione dal baricentro.

- lunghezza dell'arco di circonferenza:2π
- ruotiamo rispetto all'asse x; coordinata y del baricentro

$$y_0 = \frac{1}{L(\varphi)} \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

- $$A = 2\pi \frac{1}{L(\varphi)} L(\varphi) \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt =$$
$$2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Uno sferoide è una superficie tridimensionale ottenuta per rotazione di un arco di ellisse attorno ad uno dei suoi assi principali. Esistono tre tipi di sferoide:

- se l'arco superiore dell'ellisse è ruotato attorno al suo asse maggiore, si ottiene uno sferoide prolato.
- se l'arco superiore dell'ellisse è ruotato attorno al suo asse minore, si ottiene uno sferoide oblato
- se l'arco superiore è una semicirconferenza, la superficie ottenuta è una sfera.

La superficie di un ellissoide ottenuta per rotazione: la parte superiore dell'ellisse viene ruotata rispetto all'asse x: assumiamo

$$a > b$$

Ricordiamo l'equazioni parametriche dell'arco di ellisse

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t, & t \in [0, \pi] \\ y(t) = b\sin t. \end{cases}$$

$$A = 2\pi \int_0^{\pi} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} =$$

$$\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t} = a\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\cos^2 t}$$

$$A = 2\pi b \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{(a^2 \sin^2 t) + (b^2 \cos^2 t)} dt =$$

$$2\pi ab \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t} dt$$

$$2\pi ab \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t} dt =$$

$$2\pi ab \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt =$$

$$\frac{2\pi ab}{k} \int_{-k}^{k} \sqrt{1 - u^2} du$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$a = 1$

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + C$$

$$\frac{2\pi ab}{k} \int_{-k}^{k} \sqrt{1 - u^2} du = \frac{2\pi ab}{k} \left(\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} |_{-k}^{k} \right) =$$

$$\frac{2\pi ab}{k} \left(\arcsin k + k \sqrt{1 - k^2} \right) = 2\pi ab \left(\frac{\arcsin k}{k} + \sqrt{1 - k^2} \right) =$$

$$2\pi ab \left(\frac{\arcsin k}{k} + \frac{b}{a} \right) = 2\pi ab \frac{\arcsin k}{k} + 2\pi b^2$$

La sfera può essere pensata come una rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse x il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ che rappresenta una semicirconferenza di raggio R . Pertanto, per il teorema di Guldino, l'area della superficie sferica risulta:

$$A = 2\pi \int_{-R}^{+R} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx =$$

$$2\pi \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{+R} R\, dx =$$

$$2\pi R(R + R) = 4\pi R^2.$$

Area della superficie conica (laterale). retta (0,0) (h,r)

$$f(x) = \frac{r}{h}x \quad 0 \leq x \leq h$$

$$A = 2\pi \int_0^h f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = 2\pi \int_0^h (\frac{r}{h}x)\sqrt{1 + (\frac{r}{h})^2}dx =$$

$$\frac{2\pi r}{h^2}\sqrt{h^2 + r^2}\frac{1}{2}x^2|_0^h = \pi r\sqrt{h^2 + r^2} = \pi ra$$

Forma differenziale lineare $C^1(A)$ (coefficienti $C^1(A)$), A aperto

$$\omega = a_1(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)dx_n$$

La forma differenziale

$$\omega = a_1(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)dx_n$$

è chiusa se e solo se vale l'uguaglianza

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$

per ogni $i, j = 1, \ldots, n$

$$n = 2$$

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$$

$$a_y = b_x$$

Una forma differenziale lineare definita su $A \subset R^n$ aperto, continua (a_i continuo). Si dice che ω è esatta in A se esiste una funzione $F : A \to \mathbb{R}$ differenziabile detta primitiva tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = a_i$$

Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = ydx + xdy \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Cerchiamo primitive F attraverso la soluzione di

$$F_x = y \quad F_y = x$$

Da $F_x = y$ per integrazione rispetto a x otteniamo $F(x, y) = xy + G(y)$ deve risultare $G(y) = c$

$$F(x, y) = xy + c$$

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice connesso per archi se per ogni coppia di punti P e Q di A esiste una curva che li collega.
Esiste una funzione continua $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\varphi(a) = P \ \ \varphi(b) = Q$$

Teorema.
Sia A un aperto connesso. Se la forma differenziale $\omega(x, y)$ è esatta in A allora ammette infinite funzioni primitive, se G è una primitiva tutte le altre primitive possono essere calcolate in questo modo

$$F(x, y) = G(x, y) + k, k \in \mathbb{R}$$

dim. Si pone

$$H(x, y) = F(x, y) - G(x, y)$$

$H_x = H_y = 0$ in A un aperto connesso. H costante

$A \subset \mathbb{R}^2$ A aperto

- Se $\omega \in C^1(A)$ è esatta allora è chiusa ma in generale non vale il viceversa.

$$F_x = a \quad F_y = b$$

$$F_{xy} = a_y \quad F_{yx} = b_x$$

$$a_y = b_x$$

$$\omega = ydx + xdy \;\; (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

esatta in $\mathbb{R}^2$ e quindi chiusa in $\mathbb{R}^2$

A aperto di $\mathbb{R}^2$, la forma di classe $C(A)$

$$\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$$

L'integrale curvilineo di una forma differenziale si calcola nel modo seguente:

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b [a(x(t),y(t))x'(t) + b(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

ove φ è una curva regolare a tratti contenuta in A in cui sia fissato un orientamento e una rappresentazione parametrica $(x(t),y(t))$ con $t \in [a,b]$ il cui verso di percorrenza coincida con l'orientamento assegnato su φ.

Ricordiamo che a ogni curva possiamo associare un verso di percorrenza o orientamento, indotto dalla rappresentazione parametrica. Si dice che il punto $P = \varphi(t_P)$ precede il punto $Q = \varphi(t_Q)$ nel verso indotto dal parametro t se

$$t_P < t_Q$$

A differenza dell'integrale curvilineo di funzione, l'integrale di una forma differenziale dipende dall'orientamento della curva e si deve sempre specificare. Se $-\varphi$ è una curva equivalente a φ ma orientata nel verso opposto $\int_{-\varphi} \omega = -\int_{\varphi} \omega$

- ω esatta: possiamo calcolare l'integrale lungo una qualsiasi curva congiungente i suoi estremi (non chiusa) stessi punti iniziali e finali.
- ω esatta: l'integrale lungo una qualsiasi curva chiusa vale 0

Se φ è una curva regolare a tratti possiamo decomporre φ definita in $[a, b]$ suddividendo $a = t_0 < t_1 < \dots t_N = b$ mediante curve regolari φ_1, $\varphi_2, \dots, \varphi_N$ con $\varphi_i = \varphi$ in $[t_{i-1}, t_i] \quad i = 1, \dots N$

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\varphi_1} \omega + \cdots \int_{\varphi_N} \omega$$

Sia A un aperto connesso. Per ogni coppia di punti P e Q di $\mathbb{R}^2$ indichiamo con $\phi(P, Q)$ l'insieme non vuoto di tutte le curve regolari a tratti con sostegno contenuto in A e aventi e come estremi i punti P e Q e lo stesso verso di percorrenza.

Teorema Sia A un aperto connesso e sia $\omega \in C(A)$. Allora ω è esatta se e solo se per ogni coppia di punti P e Q di $\mathbb{R}^2$ e per ogni coppia di curve φ_1 e $\varphi_2 \in \phi(P, Q)$ (stessi punti iniziali e finali) risulta

$$\int_{\varphi_1} \omega = \int_{\varphi_2} \omega$$

TeoremaSia A un aperto connesso e sia $\omega \in C(A)$. Allora ω è esatta se e solo se per ogni curva chiusa regolare a tratti φ con sostegno contenuto in A risulta

$$\int_{\varphi} \omega = 0$$

La forma seguente

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

definita nell'aperto del piano $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
è chiusa:

$$(-\frac{y}{x^2+y^2})_y = (\frac{x}{x^2+y^2})_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ma la forma ω non è esatta in A.
Curva chiusa: circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

$$\int_a^b [a(x(t),y(t))x'(t) + b(x(t),y(t))y'(t)]dt =$$

$$\int_0^{2\pi} [sin^2 t + \cos^2 t]dt = 2\pi$$

Calcolare l'integrale di

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

lungo l'arco di centro $(0,0)$ circonferenza di raggio 2 e estremi $(2,0)$ $(\sqrt{3},1)$, orientata in senso antiorario. Osserviamo che la rappresentazione parametrica della circonferenza con verso antiorario è

$$(2\cos(t), 2\sin(t))$$

Il punto $(2,0)$ corrisponde al valore del parametro $t=0$ Il punto $(\sqrt{3},1)$ corrisponde al valore del parametro $t=\frac{\pi}{6}$

$$\int_a^b [a(x(t),y(t))x'(t) + b(x(t),y(t))y'(t)]dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} [\sin^2 t + \cos^2 t]dt = \frac{\pi}{6}$$

Consideriamo l'integrale curvilineo della forma

$$\omega = ydx + xdy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

lungo tre curve diverse $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ per raggiungere da $P = (0, 0)$ e $Q = (1, 1)$, con orientamento indotto dalla parametrizzazione.

$$\varphi_1 \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \quad t \in [0, 1] \end{cases} \qquad \varphi_2 \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\varphi_3 \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \qquad t \in [0, 1] \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\varphi_1 : \int_a^b [a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)]dt = \int_0^1 t^2 + 2t^2 dt = 1$$

$$\varphi_2 : \int_a^b [a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)]dt = \int_0^1 t + t = 1$$

$$\varphi_3 : \int_a^b [a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)]dt = 1$$

Teorema. Sia ω di classe C^1 esatta in A aperto e connesso di $\mathbb{R}^2$ e sia φ una curva regolare a tratti il cui sostegno è interamente contenuto in A congiungente due punti $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ di A nel verso che va da P a Q . Allora

$$\int_\varphi \omega = F(x_Q, y_Q) - F(x_P, y_P)$$

con F qualsiasi primitiva di ω
Esempio

$$\omega = ydx + xdy \;\; (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Funzione primitiva (esercizio precedente di calcolo dell'integrale della forma)

$$F(x, y) = xy$$

$$F(x(1), y(1)) - F(x(0), y(0)) = 1$$

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\varphi} a(x,y)dx + b(x,y)dy =$$

$$\int_{\varphi} F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy =$$

$$\int_a^b [F_x(x(t),y(t))x'(t) + F_y(x(t),y(t))y'(t)]dt =$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} F(x(t),y(t))dt = F(x(b),y(b)) - F(x(a),y(a))$$

Insiemi semplicemente connessi
D dominio: chiusura di un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$
Insiemi semplicemente connessi in $\mathbb{R}^2$: a livello intuitivo, essi coincidono con gli insiemi privi di buchi.
Definizione Un insieme aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice semplicemente connesso se, data una qualsiasi curva φ semplice e chiusa regolare a tratti con sostegno contenuto in A, è la frontiera di un dominio limitato D interamente contenuto in A (l'interno di φ è contenuto in A) .
In $\mathbb{R}^2$ sono insiemi semplicemente connessi i seguenti insiemi:

- tutti gli aperti convessi (In $\mathbb{R}^2$ un insieme convesso è un insieme nel quale, per ogni coppia di punti, il segmento che li congiunge è interamente contenuto nell'insieme.)

In A semplicemente connesso una forma differenziale di classe C^1 chiusa è esatta.

Non sono invece semplicemente connessi in $\mathbb{R}^2$ gli insiemi:

- tutti gli aperti privati di un punto (in particolare, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$);
- le corone circolari.

In A semplicemente connesso una forma differenziale di classe C^1 chiusa è esatta.
Data la forma differenziale

$$\omega = [1 + \sin(x + y)]dx + \sin(x + y)dy.$$

(i) stabilire se è chiusa in $\mathbb{R}^2$,
(ii) stabilire se è esatta in $\mathbb{R}^2$.
(iii) calcolare una primitiva ($F(x, y) = x - \cos(x + y)$)
(iv) Data la curva curva $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, calcolare l'integrale curvilineo della forma sulla curva con l'orientamento dato dalla parametrizzazione.
$x(\frac{\pi}{2}) = \cos^3(\frac{\pi}{2}) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = \sin^3(\frac{\pi}{2}) = 1$
$x(0) = \cos^3(0) = 1, y(0) = \sin^3(0) = 1$

$$F(x(\frac{\pi}{2}), y(\frac{\pi}{2})) - F(x(0), y(0)) = F(0, 1) - F(1, 0) =$$

$$- \cos(1) - 1 + \cos(1) = -1$$

In A semplicemente connesso una forma differenziale chiusa di classe C^1 è esatta.
Esercizio: calcolo di primitiva

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$$

A è semplicemente connesso ?

$$\omega = \frac{-xy}{\sqrt{(y - x^2)}} dx + \left(\frac{3y - 2x^2}{2\sqrt{(y - x^2)}} + 2\right) dy$$

La forma differenziale è chiusa?

Sia ω una forma differenziale esatta in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$$

Per il calcolo della primitiva procediamo in questo modo

- $$F_x = a \quad F(x,y) = \int a(x,y)dx + g(y)$$

  Imponendo la seconda condizione $F_y = b$ determiniamo per integrazione rispetto a y la funzione g e quindi la funzione F

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$$

$$\omega = \frac{-xy}{\sqrt{(y - x^2)}} dx + (\frac{3y - 2x^2}{2\sqrt{(y - x^2)}} + 2) dy$$

La forma differenziale è esatta: calcolo della primitiva

$$\int \frac{-xy}{\sqrt{(y - x^2)}} dx = y\sqrt{(y - x^2)} + g(y)$$

$$(y\sqrt{(y - x^2)} + g(y))_y = \sqrt{(y - x^2)} + \frac{y}{2\sqrt{(y - x^2)}} =$$

$$\frac{2y - 2x^2 + y}{2\sqrt{(y - x^2)}} + g'(y) = \frac{3y - 2x^2}{2\sqrt{(y - x^2)}} + 2) + g'(y)$$

$$g'(y) = 2 \quad g(y) = 2y$$

La forma differenziale

$$\omega = (3x^2y - y^2)dx + (x^3 - 2xy + 1)dy$$

è esatta: calcolare una primitiva

$$F(x,y) = x^3y - xy^2 + y$$

Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = xydy$$

su φ ove φ è l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ percorso in senso orario situato nel quadrante positivo degli assi.

$$\int_\varphi \omega = -\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t dt = ... = -\frac{1}{3}$$

Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = (2x + 3y)dx$$

su φ ove φ è il bordo dell'insieme limitato definito dalla parabola $y = x^2$ e $y = \sqrt{3}x$ percorso in senso antiorario.

$$\varphi_1 : \int_0^{\sqrt{3}} (2t + 3t^2)dt = 3 + 3\sqrt{3}$$

$$\varphi_2 : -\int_0^{\sqrt{3}} (2t + 3\sqrt{3}t)dt = -3 - \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

$$\int_\varphi \omega = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Consideriamo la frontiera del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ percorsa in senso antiorario e descritta dai segmenti $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$: parametrizzazione

$$\varphi_1 \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \quad t \in [0,1] \end{cases} \quad \varphi_2 \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\varphi_3 \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = 1 \quad t \in [0,1] \end{cases} \quad \varphi_4 \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 1 - t \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

Calcoliamo l'integrale della forma differenziale su tale curva di

$$\omega = x^2 dx + xy^2 dy \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\varphi_1 : \int_a^b [a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)]dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$\varphi_1 \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\omega = x^2 dx + xy^2 dy$$

$$\varphi_2 : \int_a^b [a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)]dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$\varphi_2 \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\omega = x^2 dx + xy^2 dy$$

$$\varphi_3 : \int_a^b [a(x(t),y(t))x'(t)+b(x(t),y(t))y'(t)]dt = -\int_0^1 (1-t)^2 dt = -\frac{1}{3}$$

$$\varphi_3 \begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = 1 \quad\quad t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\omega = x^2 dx + xy^2 dy$$

$$\varphi_4 : \int_a^b [a(x(t),y(t))x'(t) + b(x(t),y(t))y'(t)]dt = 0$$

In conclusione

$$\int_\varphi \omega = \frac{1}{3}$$

Domini normali

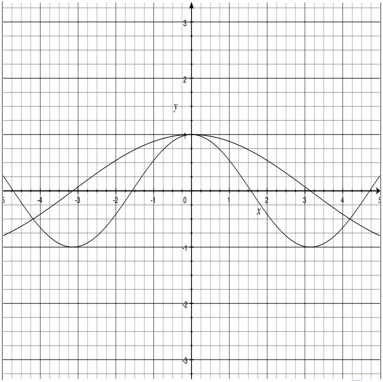
- Dominio normale rispetto a x; α, β funzioni continue.

$$D = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

- D dominio normale (rispetto a x) si dice regolare se α e β sono funzioni di classe C^1 e $\alpha(x) < \beta(x) \ \ \forall x \in (a, b)$

Esempio:

$$D = \{(x, y) \in [0, \pi] \times \mathbb{R} : \cos x \leq y \leq \cos \frac{x}{2}\}$$



Domini normali

- Dominio normale rispetto a y; δ, γ funzioni continue.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [c, d] : \delta(y) \leq x \leq \gamma(y)\}$$

- D dominio normale (rispetto a y) si dice regolare se δ e γ sono funzioni di classe C^1 e $\delta(y) < \gamma(y)\ \ \forall y \in (c, d)$

Esempio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1] : y \leq x \leq 1\}$$

Può accadere che un dominio risulti normale sia rispetto all'asse x che all'asse y. Ad esempio il triangolo T determinato da $(0,0)$,$(1,0)$ e $(1,1)$.

$$T = \{(x, y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : 0 \le y \le x\}$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0,1] : y \le x \le 1\}$$

Generalizzare

$$T = \{(x, y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : a \le y \le x\}$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [a,b] : y \le x \le b\}$$

Può accadere che un dominio non risulti normale rispetto all'asse x e non risulti normale rispetto all'asse y.
Esempio: corona circolare.
Un dominio regolare D è l'unione di un numero finito di domini normali regolari a due a due privi di punti in comune: la sua frontiera è unione finita di curve regolare a tratti.

Quadrato: insieme normale rispetto a entrambi gli assi.
Consideriamo la frontiera del quadrato $[0, a] \times [0, a]$ percorsa in senso antiorario e descritta dai segmenti $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$: parametrizzazione

$$\varphi_1 \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \quad t \in [0, a] \end{cases} \quad \varphi_2 \begin{cases} x(t) = a \\ y(t) = t \quad t \in [0, a] \end{cases}$$

$$\varphi_3 \begin{cases} x(t) = a - t \\ y(t) = a \quad t \in [0, a] \end{cases} \quad \varphi_4 \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = a - t \quad t \in [0, a] \end{cases}$$

Calcoliamo l'integrale della forma differenziale su tale curva di

$$\omega_1 = xdy \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\omega_2 = -ydx \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\omega_1 : \int_{\varphi_2^+} xdy = a \int_0^a dt = a^2$$

$$\omega_2 : \int_{\varphi_3^+} -ydx = -a \int_0^a (-1)dt = a^2$$

Calcolo dell'area di domini piani con le formule di Gauss Green

$$area(A) = \int_{\varphi^+} xdy$$

$$area(A) = \int_{\varphi^+} -ydx$$

$$area(A) = \frac{1}{2}\int_{\varphi^+} -ydx + xdy$$

Area dell'ellisse

$$area(A) = \frac{1}{2}\int_{\varphi^+} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\sin^2\theta + ab\cos^2\theta)d\theta = \pi ab$$

Area dell'asteroide $a = 1$

$$area(A) = \frac{1}{2}\int_{\varphi^+} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\sin^4\theta\cos^2\theta + 3\sin^2\theta\cos^4\theta d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta =$$

$$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta =$$

$$\frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2(2\theta)d\theta = \frac{3}{16}\int_0^{4\pi}\sin^2 u\, du = \frac{3}{16}\frac{1}{2}(u - \sin u\cos u)|_0^{4\pi} =$$

$$\frac{3}{16}\frac{1}{2}4\pi = \frac{3}{8}\pi$$

Generalizzare $(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ con $a > 0$.

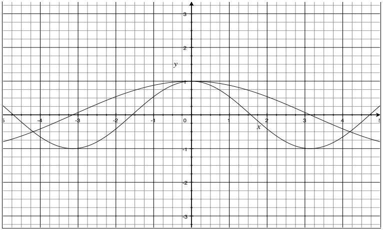
Formule di riduzione degli integrali doppi.
Nel caso di due variabili, l'integrale di f continua in D su un dominio normale rispetto all'asse x, definito dalle funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ anch'esse continue con $\alpha(x) \leq \beta(x)$, x tra a e b risulta

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\mathrm{d}y,$$

mentre, nel caso di dominio normale rispetto all'asse y, con δ, γ funzioni continue, con $\delta(y) \leq \gamma(y)$ y tra c e d si ha

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\delta(y)}^{\gamma(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

$$D = \{(x,y) \in [0,\pi] \times \mathbb{R} : \cos x \leq y \leq \cos \frac{x}{2}\} \quad f(x,y) = y$$



$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x \int_{\cos x}^{\cos \frac{x}{2}} y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos^2 \frac{x}{2} - \cos^2 x)dx = 0$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \cos x \sin x) + c$$

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\delta(y)}^{\gamma(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

Formula di inversione di Dirichlet

$$D = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : a \leq y \leq x\}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [a,b] : y \leq x \leq b\}$$

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}y \int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

Verifica.

$$D = \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq x\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1] : y \leq x \leq 1\}$$

Calcolare l'integrale doppio esteso a D nelle due formulazioni della funzione $f(x, y) = x^2 y$

$$\int\int_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x \int_0^x y \mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{10}$$

$$\int\int_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^1 y \mathrm{d}y \int_y^1 x^2 \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{3} \int_0^1 y(1 - y^3) dy = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{5} y^5)|_0^1 = \frac{1}{10}$$

Proprietà

- linearità: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e per f, g integrabili in D

$$\int\int_D \alpha f(x,y) + \beta g(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\alpha \int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \int\int_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- monotonia: per f, g integrabili in D

$$f(x,y) \leq g(x,y) \ \ \forall (x,y) \in D \implies$$

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \int\int_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Se $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ costituiscono una partizione di D in domini normali (D_i a due a due privi di punti interni in comune)vale la formula

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \int\int_{D_i} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Teorema di Gauss Green
Sia D un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$. Sia $\partial^+ D$ la frontiera di D orientata positivamente. $f : D \to \mathbb{R}, \quad f \in C^1(D)$. Valgono le seguenti formule

$$\int\int_D f_x(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial^+ D} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\int\int_D f_y(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{\partial^+ D} f(x,y)\mathrm{d}x$$

Dimostriamo

$$\int\int_D f_x(x,y) = \int_{\partial^+ D} f \mathrm{d}y$$

nel caso particolare D dominio normale rispetto all'asse y.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [c,d] : \delta(y) \leq x \leq \gamma(y)\}$$

$$\int\int_D f_x(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\delta(y)}^{\gamma(y)} f_x(x,y)\mathrm{d}x =$$

$$\int_c^d f(\gamma(y),y) - f(\delta(y),y)\mathrm{d}y$$

Nel piano la frontiera di D è costituita da quattro curve di cui due segmenti orientati paralleli all'asse x in cui $y = \mathit{costante}$. Su tale segmenti l'integrale curvilineo della forma differenziale fornisce un contributo nullo. Dobbiamo calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale lungo γ e δ

$$\int_c^d f(\gamma(t),t)dt - \int_c^d f(\delta(t),t)dt$$

Formula di integrazione per parti
Siano f e g funzioni di classe C^1 in D dominio regolare di $\mathbb{R}^2$. Allora

$$\int\int_D f\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial^+ D} fg\mathrm{d}y - \int\int_D \frac{\partial f}{\partial x}g\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\int\int_D f\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{\partial^+ D} fg\mathrm{d}x - \int\int_D \frac{\partial f}{\partial y}g\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dim: Dalle formule di Gauss Green con fg al posto di f

Esercizio. Sia D la corona circolare di cento l'origine e raggi 2 e 1. Determinare l'orientamento positivo del bordo. Calcolare tramite la formula di Gauss Green

$$\int\int_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

Applicando la formula di Gauss Green

$$\int\int_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_D (\frac{x^3}{3})_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_{\partial^+ D} x^3 \mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi} 16\cos^4 t dt\right) - \frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt\right)$$

Calcoliamo

$$\frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi} 16\cos^4 t dt\right) = \frac{16}{3}\left(\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt\right) =$$

$$\frac{16}{3}\left(\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt - \int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t dt\right) =$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\sin 2t)^2 dt =$$

$$u = 2t \;\; \frac{1}{8}\int_0^{4\pi}(\sin u)^2 du = \frac{1}{16}(u - \sin u\cos u)|_0^{4\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt = \frac{1}{2}(t + \cos t\sin t)|_0^{2\pi} = \pi$$

In conclusione vale

$$\int_0^{2\pi} cos^4 t dt = \frac{3\pi}{4}$$

Quindi

$$\frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi} 16\cos^4 t dt\right) - \frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi}\cos^4 t dt\right) = \frac{16}{3}\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{3}\frac{3\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$$

Baricentro di un dominio normale D

$$x_0 = \frac{1}{m(D)} \int\int_D x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$y_0 = \frac{1}{m(D)} \int\int_D y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Esercizio.Calcolo del baricentro della porzione di cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 del primo quadrante.

$$m(D) = \frac{\pi}{4}$$

$$x_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{4}{\pi}\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx =$$

$$-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)|_0^1 = \frac{4}{3\pi}$$

$$y_0 = x_0$$

Teorema di Guldino sui solidi di rotazione. Sia S il solido generato dalla rotazione di un angolo α di un dominio normale D del piano intorno a un asse r non intersecante D. Il volume di S è dato dal prodotto dell'area di D per la lunghezza dell'arco di circonferenza decritto nella rotazione del baricentro

Rotazione rispetto all'asse x di 2π:

$$2\pi \int\int_D y \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

D descritto da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$2\pi \int_a^b \mathrm{d}x \int_0^{f(x)} y \mathrm{d}y = \pi \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x$$

Esercizio. Volume della sfera ottenuto come rotazione del semicerchio con $y \geq 0$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Esercizio. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando di 2π rispetto all'asse x. la porzione di piano del primo quadrante delimitata dall'asteroide (con $a = 1$) e dagli assi

$$y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

$$V = \pi \int_{0}^{1} (1 - x^{\frac{2}{3}})^3 dx = \frac{16\pi}{105}$$

$$V = \pi \int_{0}^{1} (1 - 3x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} - x^2) dx == \pi(x - \frac{9}{5}x^{2/3+1} + \frac{9}{7}x^{\frac{4}{3}+1} - \frac{1}{3}x^3)|_0^1 =$$

$$\frac{16\pi}{105}$$

I recupero

1.Calcolare l'integrale esteso alla curva φ di equazioni parametriche

$$x(t) = t \quad y(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad t \in [0, \sqrt{\pi}]$$

della funzione

$$f(x, y) = \frac{xy \cos y}{\sqrt{1 + x^2}}$$

2. Calcolare minimi e massimi relativi della funzione

$$f(x, y) = (x + y)(1 - (x + y)^2)$$

1.

$$x(t) = t \quad y(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad t \in [0, \sqrt{\pi}]$$

$$f(x, y) = \frac{xy \cos y}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} t t^2 \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right) \frac{\sqrt{1 + t^2}}{\sqrt{1 + t^2}} dt$$

$$s = \frac{1}{2}t^2$$

ds=tdt

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} s \cos(s) ds = s \sin(s)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(s) ds = \frac{\pi}{2} - 1$$

2.

$$f(x,y) = (x+y)(1-(x+y)^2) = (x+y) - (x+y)^3$$

$$f_x(x,y) = 1 - 3(x+y)^2 = 0 \quad f_{xx} = -6(x+y)$$

$$f_y(x,y) = 1 - 3(x+y)^2 = 0, \quad f_{yy} = -6(x+y)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -6(x+y)$$

$$(x+y)^2 = \frac{1}{3}$$

$$f(x,y) = (x+y)(1-(x+y)^2)$$

$$x+y=t$$

$$f(t) = t(1-t^2) = t - t^3 \qquad f'(t) = 1 - 3t^2 = 0 \iff t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0 \quad f''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$$

$x+y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ punti di massimo relativo.
$x+y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ punti di minimo relativo.

$$f_M = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$f_m = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Il recupero.

1. $n = 3$

$$a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$$

di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ ed esatta in $\mathbb{R}^3$.

Determinare le condizioni analoghe a $a_y = b_x$ nel piano.

2. Fornire le equazioni parametriche della frontiera del quadrato $[0,a] \times [0,a]$ percorsa in senso antiorario.

3. Calcolare una primitiva della forma differenziale

$$f(x,y) = 2xydx + x^2dy$$

$$F(x,y) = x^2y$$

4.Per ogni $y \in \mathbb{R}$:

$$1)\ \ \sin(iy) = i \sinh y \quad 2)\ \ \cos(iy) = i \sinh y$$

$\boxed{\text{a}}$ vera

$\boxed{\text{b}}$ la prima vera la seconda falsa

$\boxed{\text{c}}$ la seconda vera la prima falsa

$\boxed{\text{d}}$ entrambe false

La prima è vera la seconda è falsa. Infatti

$$\sin iy = \frac{1}{2i}(e^{i^2 y} - e^{-i^2 y}) = \frac{-1}{i} \sinh y = i \sinh y \,.$$

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^{i^2 y} + e^{-i^2 y}) = \cosh y \,.$$