

ANALISI MATEMATICA I

Per gli studenti di Ingegneria dell'Energia Elettrica a.a. 2024-2025

Paola Loreti

October 30, 2024

Introduzione

Domanda: Chi è più grande tra e^π e π^e ? (Dimostrare)

Riferimento bibliografico: Ivan Niven The Two-Year College
Mathematics Journal, Vol. 3, No. 2. (Autumn, 1972), pp. 13-15.

Primi simboli

$\exists$	esiste
$\forall$	per ogni
$\in$	appartiene
$\cup$	unione insiemistica
$\cap$	intersezione insiemistica
$\emptyset$	insieme vuoto
ϵ	epsilon
δ	delta
$\mathbb{R}$	l'insieme dei numeri reali
$+\infty$	più infinito
$-\infty$	meno infinito
$\mathbb{R}$	Insieme dei numeri reali
$\mathbb{R}_+$	Insieme dei numeri reali positivi
$\mathbb{R}^*$	Insieme dei numeri reali con l'aggiunta di $-\infty$ e $+\infty$
$\mathbb{C}$	Insieme dei numeri complessi

Costanti fondamentali

$$e \approx 2.7182818284590452353602874713527$$

$$\pi \approx 3,141592653589793238462643383279$$

Prime nozioni

A e B due insiemi di un insieme ambiente S . Con $\emptyset$ si denota l'insieme vuoto

$\cup$ unione insiemistica

$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$$

► Per ogni A, B

$$A \cup B = B \cup A$$

► Per ogni A, B, C

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

► $\emptyset$ tale che per ogni A si ha

$$A \cup \emptyset = A$$

$\cap$ intersezione insiemistica

$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$$

- ▶ Per ogni A, B

$$A \cap B = B \cap A$$

- ▶ Per ogni A, B, C

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- ▶ $\emptyset$ tale che per ogni A

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Sia $A =$

$\{\text{Marrakesh, BuenosAires, St.Petersburg, Kyoto, NewYork, Santiago}\}$

e

$B =$

$\{\text{Toronto, St.Petersburg, Kyoto, Montreal, Barcelona, Vancouver, Halifax,}$

Trovare $A \cap B$ e $A \cup B$.

Per l'insieme dei numeri naturali si trova in letteratura la notazione

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

e

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

oppure

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.$$

Questa modalità descrive l'insieme tramite gli elementi che lo compongono, non è importante l'ordine in cui gli elementi vengono elencati.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$

perchè ogni numero naturale è anche un intero (non essendo vero il viceversa). L'insieme dei numeri razionali è descritto tramite la proprietà che i suoi elementi devono soddisfare

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}, \text{ con } n \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Le proprietà dei numeri reali

Si indica con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. In $\mathbb{R}$ sono definite le operazioni di *Addizione* e *Moltiplicazione* ed una *relazione d'ordine totale* $\leq$ (minore o uguale) con le seguenti proprietà

- ▶ Per ogni coppia di numeri reali a, b si ha

$$a + b = b + a$$

(proprietà commutativa dell'Addizione)

- ▶ Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

(proprietà associativa dell'Addizione)

- ▶ Esiste ed è unico l'elemento 0 (zero) tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$0 + a = a + 0 = a.$$

(esistenza dell'elemento neutro rispetto all'Addizione)

- ▶ Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un unico simmetrico rispetto all'Addizione, detto anche opposto, $-a \in \mathbb{R}$ tale che

$$a + (-a) = 0$$

- ▶ Per ogni coppia di numeri reali a, b si ha

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(proprietà commutativa della Moltiplicazione)

- ▶ Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(proprietà associativa della Moltiplicazione)

- ▶ Esiste ed è unico l'elemento 1 (uno), diverso da 0, tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

(esistenza dell'elemento neutro rispetto alla Moltiplicazione)

- ▶ Per ogni $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ esiste un unico simmetrico rispetto alla Moltiplicazione, detto l'inverso o il reciproco di a , indicato con a^{-1} o con $1/a$ tale che

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

- Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(proprietà distributiva della Moltiplicazione rispetto all'Addizione)

Si indica con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri $1, 2, \dots$, Si indica con $\mathbb{Z}$ (insieme degli interi) l'insieme dei numeri naturali unito con i loro opposti e lo 0. L'insieme $\mathbb{Q}$ è l'insieme delle frazioni di interi. Un generico elemento in $\mathbb{Q}$ è del tipo $\frac{m}{n}$, , con $n \neq 0$. Le proprietà algebriche descritte prima in (8) valgono in $\mathbb{Q}$. Come conseguenza dell'operazione di moltiplicazione in $\mathbb{R}$ è definita l'operazione **potenza**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con le proprietà seguenti

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Dato un numero reale $a \geq 0$ esiste ed è univocamente determinato il numero b **radice aritmetica** n -esima di a definita come

$$b = a^{1/n} \iff b^n = a$$

Ricordiamo che $+\infty$ e $-\infty$ **non** sono numeri reali.

Vale la *legge di cancellazione dell'addizione*

$$a + b = a + c \implies b = c$$

$$b = b + 0 = b + a - a = a + b - a = a + c - a = a - a + c = 0 + c = c$$

Vale *l'unicità dell'opposto*.

Supponiamo che esistano due opposti

$$a + (-a) = 0, \quad a + \alpha = 0. \text{ Allora}$$

$$a + (-a) = a + \alpha$$

Per la legge di cancellazione dell'addizione si ottiene $-a = \alpha$.

$$[1] \forall a \in \mathbb{R}, \quad a \cdot 0 = 0$$

$$[2] \forall a \in \mathbb{R}, \quad -(-a) = a$$

$$[3] \forall a \in \mathbb{R}, \quad (-1) \cdot a = -a$$

Proof.

[1] $a + a0 = a1 + a0 = a(1 + 0) = a = a + 0$, segue dalla legge di cancellazione dell'addizione.

[2] $a + (-a) = (-a) + a = 0$ a è l'opposto di $-a$, ossia $a = -(-a)$. per l'unicità dell'opposto

[3] $(-1)a + a = [-1 + 1]a = 0a = 0$, quindi $(-1)a$ è l'opposto di a . □

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ oppure } b = 0$$

Proof.

Se $a = 0$ oppure $b = 0$ si ha $a0 = 0$ per quanto precedentemente dimostrato. Se $ab = 0$ allora se $a = 0$ l'asserto è vero, se $a \neq 0$ allora $\exists a^{-1}$ tale che $aa^{-1} = 1$. Allora

$$b = b1 = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = aba^{-1} = 0a^{-1} = 0,$$

ossia $b = 0$.



La relazione $\leq$ è di ordine totale in $\mathbb{R}$ ossia, comunque si considerino due numeri reali a, b necessariamente deve aversi $a \leq b$ oppure $b \leq a$ e sono vere entrambe se e solo se $a = b$. Inoltre tale relazione $\leq$ è compatibile con le operazioni nel senso precisato dalle proprietà : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$0 \leq a \text{ e } 0 \leq b \implies 0 \leq a + b, \quad 0 \leq a \cdot b$$

Notazione: $a < b \iff a \leq b \text{ e } a \neq b$

Per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ vale una ed una sola delle seguenti relazioni

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

Ricordiamo che una disequazione può essere portata a una disequazione equivalente (ossia che ammette le stesse soluzioni)

- ▶ aggiungendo al primo e secondo membro uno stesso numero reale senza toccare il verso della disuguaglianza.
- ▶ moltiplicando primo e secondo membro per uno stesso numero reale **positivo** (i.e. > 0) senza toccare il verso della disuguaglianza.
- ▶ moltiplicando primo e secondo membro per uno stesso numero reale **negativo** (i.e. < 0) **cambiando** il verso della disuguaglianza

I numeri irrazionali

Ci sono numeri reali che non appartengono all'insieme $\mathbb{Q}$. Sono i numeri irrazionali. Un numero irrazionale è quindi un numero reale che non può essere scritto come una frazione $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, con $n \neq 0$. Alcuni numeri irrazionali sono numeri irrazionali algebrici come la radice quadrata di due e gli irrazionali algebrici sono radici di equazioni algebriche a coefficienti interi (esempio la la radice quadrata di due è soluzione di $x^2 - 2 = 0$), altri sono numeri irrazionali trascendenti come e, π e gli irrazionali trascendenti non sono radici di equazioni algebriche a coefficienti interi. I numeri trascendenti furono per la prima volta distinti dagli irrazionali algebrici da Kronecker.

Lemma

Se m^2 è pari, allora m è pari

Proof.

Se m fosse dispari $m = 2k + 1$, allora

$m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 3k + 1$ risulterebbe dispari contro l'ipotesi.

Il numero $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Proof.

Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale. Allora esistono due interi m e n privi di fattori comuni eccetto l'unità, tali che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Elevando al quadrato si ha

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \Longleftrightarrow \quad m^2 = 2n^2$$

Questo implica che m^2 è pari, e che quindi m è pari, ossia esiste k intero tale che $m = 2k$. Sostituendo a $m^2 = 2n^2$ abbiamo che anche n è pari, e quindi m e n hanno in comune un fattore 2, impossibile perchè abbiamo assunto m e n privi di fattori comuni. Abbiamo ottenuto una contraddizione con l'ipotesi. $\square$

I numeri reali possono essere pensati come punti su una retta. I numeri corrispondenti agli interi sono ugualmente spaziati. La distanza tra due interi consecutivi è pari a 1. La distanza tra due numeri naturali pari consecutivi è pari a 2. La distanza tra due reali consecutivi $x_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ come si comporta asintoticamente per n grande?

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

(diventa sempre più piccolo).

La distanza tra due naturali consecutivi $x_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ come si comporta asintoticamente per n grande?

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

(diventa sempre più grande)

La distanza tra due reali consecutivi $x_n = \sqrt{n^2 + 1}$, $n \in \mathbb{N}$ come si comporta asintoticamente per n grande?

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{(n+1)^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{2n}{\sqrt{(n+1)^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}}$$

Osserviamo

$$\sqrt{(n+1)^2 + 1} = \sqrt{n^2(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})} = n\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

$$\sqrt{n^2 + 1} = \sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$\sqrt{(n+1)^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1} = n\left[\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right] \approx 2n$$

In definitiva

$$\sqrt{(n+1)^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \approx 1$$

Riflettiamo sulla dimostrazione

$$x \in \mathbb{Q}, \iff \exists m, n \in \mathbb{Z} \, x = \frac{m}{n}, \, n \neq 0$$

Cosa vuol dire negare $x \in \mathbb{Q}$?

$$x \notin \mathbb{Q}, \iff \forall m, n \in \mathbb{Z} \, x \neq \frac{m}{n}, \, n \neq 0$$

Minimo e massimo tra due numeri reali

Ricordiamo che l'operazione $\min\{a, b\}$ definisce il più piccolo numero tra a e b , ossia

$$\min\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{se } a \leq b \\ b, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'operazione $\max\{a, b\}$ definisce il più grande numero tra a e b , mentre

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq b \\ b, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Un intorno di un punto x_0 si scrive

$$I(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : -x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\},$$

$\delta > 0$ rappresenta la semiampiezza dell'intorno.

Definition

Un punto x_0 è punto di accumulazione per l'insieme X se in un qualsiasi intorno del punto x_0 cade almeno un punto appartenente all'insieme I diverso da x_0 .

Mostrare che $x = 0$ è un punto di accumulazione per

$$X = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

In generale tratteremo insiemi semplici di $\mathbb{R}$ come semplici unione e semplici intersezioni di intervalli.

Il simbolo di somma e prodotto

La sommatoria è un simbolo matematico che indica la somma di un certo insieme di numeri. Si usa la lettera $\sum$. Si deve indicare l'intervallo di valori dove la somma ha luogo ossia il valore inferiore e superiore dell'indice della somma; alla destra del simbolo $\sum$ vi è un'espressione algebrica che in generale dipende dall'indice di sommatoria. Sia $k_0 \leq k \leq k_1$ allora

$$a_{k_0} + \cdots + a_{k_1} = \sum_{k=k_0}^{k_1} a_k.$$

Fissiamo $k_0 = 1, k_1 = N$. Si ha

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_N = \sum_{k=1}^N a_k$$

Valgono le seguenti regole



$$\sum_{k=1}^N a_k = \sum_{j=1}^N a_j$$



$$\sum_{k=1}^N a_k + \sum_{k=1}^N b_k = \sum_{k=1}^N (a_k + b_k)$$

$$\sum_{k=1}^N c a_k = c \sum_{k=1}^N a_k, \quad c \in \mathbb{R}$$

► Per $1 \leq J \leq N$

$$\sum_{k=1}^J a_k + \sum_{k=J+1}^N a_k = \sum_{k=1}^N a_k$$

► Per $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^N a_k = \sum_{K=p+1}^{N+p} a_{K-p}$$



Vero o falso

$$\sum_{k=1}^N a_{k-1} = \sum_{k=2}^{N+1} a_k$$

Vero o falso

$$\sum_{k=1}^N a_{k-1} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k$$

Vero o falso

$$\sum_{k=1}^N a_{k+1} = \sum_{k=1}^N a_k$$

La produttoria è un simbolo matematico che indica il prodotto di un certo insieme di numeri. Si usa la lettera $\prod$. Si deve indicare l'intervallo di valori dove la produttoria ha luogo ossia il valore inferiore e superiore dell'indice della produttoria; alla destra del simbolo $\prod$ vi è un'espressione algebrica che in generale dipende dall'indice di produttoria

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_N = \prod_{k=1}^N a_k$$

Minimo e massimo di un insieme di numeri reali

Dato un insieme X di numeri reali un numero reale m è un minorante per X se

$$\forall x \in X \quad x \geq m.$$

Se l'insieme X ha un minorante, X si dice inferiormente limitato.

Dato un insieme X di numeri reali un numero reale M è un maggiorante per X se

$$\forall x \in X \quad x \leq M.$$

Se l'insieme X ha un maggiorante, X si dice superiormente limitato.

Un insieme inferiormente e superiormente limitato si dice limitato.

Example

► L'insieme

$$X = \{x = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

è inferiormente e superiormente limitato. L'insieme dei minoranti è dato da

L'insieme

$$X = \{x = (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$$

ha come insieme dei minoranti

$$X_m = \{x \in \mathbb{R}, x \leq -1\},$$

il cui massimo è -1 (minimo dell'insieme X), mentre l'insieme dei maggioranti è dato da

$$X_M = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 1\},$$

il cui minimo è 1 (massimo dell'insieme X).

Se esistono, il minimo e il massimo o appartengono all'insieme: puo' accadere che l'insieme non ammetta massimo o minimo. Ad esempio

$$X = \{x = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}\},$$

non ammette minimo. L'insieme dei minoranti

$$X_m = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \leq 0\},$$

ammette però massimo. Il numero 0 non è il minimo di X . È l'estremo inferiore dell'insieme X . Analogamente

$$X = \{x = -\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}\},$$

non ammette massimo. L'insieme dei maggioranti

$$X_M = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0\},$$

ammette però minimo. Il numero 0 non è il massimo di X . È l'estremo superiore dell'insieme X .

M è l'estremo superiore dell'insieme X ossia M è il minimo dei maggioranti dell'insieme X .

Non esiste $c \in \mathbb{Q}$ elemento separatore degli insiemi

$$Y = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0, q^2 > 2\}$$

$$X = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\} \cup \{q \geq 0, q^2 \leq 2\}.$$

Dim. Dovrà risultare

$$x \leq c \leq y, \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Se $c \in X$, sia $c > 0$ allora $c^2 \neq 2$ (per quanto precedentemente dimostrato), e dovrà risultare $c^2 < 2$.

Si ha per $N \in \mathbb{N}$ e

$$N > \frac{2c+1}{2-c^2},$$

allora

$$c + \frac{1}{N} \in X.$$

Infatti $c + \frac{1}{N} \in \mathbb{Q}$ e

$$\left(c + \frac{1}{N}\right)^2 = c^2 + \frac{1}{N^2} + \frac{2c}{N} < 2.$$

Abbiamo trovato un elemento di X maggiore di c , contro l'ipotesi

$$x \leq c, \forall x \in X$$

Assioma di completezza

Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con $a \leq b$
 $\forall a \in A, \forall b \in B$. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$
 $\forall a \in A, \forall b \in B$

Theorem

Ogni insieme X di numeri reali che non sia vuoto e che sia limitato superiormente possiede un estremo superiore.

Proof.

Indichiamo con Y l'insieme dei maggioranti di X . $Y \neq \emptyset$.

Applichiamo l'assioma di completezza. Esiste M reale tale che

$$x \leq M \leq y, \forall x \in X, \forall y \in Y$$

M è un maggiorante di X ossia $M \in Y$, ed è minore di tutti gli elementi di Y . Quindi M è il minimo dei maggioranti. □

Analogamente

Theorem

Ogni insieme X di numeri reali che sia non vuoto e inferiormente limitato possiede un estremo inferiore.

Per ogni insieme numerico X non limitato superiormente si pone

$$\sup X = +\infty$$

Tali insiemi sono caratterizzati dalla proprietà seguente

$$\forall M \in \mathbf{R}, \quad \exists x_1 \in X \text{ t.c. } x_1 > M.$$

In modo analogo, se X non è limitato inferiormente allora non ha minoranti. Cioè, comunque si consideri un numero reale m , esiste un elemento in X minore di m .

Per ogni insieme numerico X non limitato inferiormente si pone

$$\inf X = -\infty$$

Tali insiemi sono caratterizzati dalla proprietà

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists x_2 \in X \text{ t.c. } x_2 < m.$$

Esercizi

Dimostrare

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad -(a + b) = (-a) + (-b)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \cdot b = 0 \text{ e } a \neq 0 \implies b = 0$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ oppure } b = 0$$

Vero o falso

$$\boxed{\text{V}} \quad \boxed{\text{F}} \quad \sqrt{a^2} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{V}} \quad \boxed{\text{F}} \quad -1 \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\text{V}} \quad \boxed{\text{F}} \quad \pi \in \mathbb{Q}$$

$$\boxed{\text{V}} \quad \boxed{\text{F}} \quad [0, 5] \subset [1, 6]$$

Quale è vera?

☐ a $\sqrt{a} = a$ non ammette soluzione in $\mathbb{R}$

☐ b $a^2 = b^2 \iff a = b$

☐ c $0, \overline{3} \in \mathbb{Q}$

☐ d un numero naturale $\in \mathbb{Q}$

Quale è vera?

- ☐ a $\max\{a, b\} > \min\{a, b\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- ☐ b $\max\{a, b\} \geq \min\{a, b\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- ☐ c un numero reale al quadrato è sempre > 0 .

Il modulo di x

Dato $x \in \mathbb{R}$ il modulo di x è definito

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

Vale per $x, y \in \mathbb{R}$

- ▶ $|x| \geq 0$
- ▶ $x \neq 0$ se e solo se $|x| > 0$
- ▶ $|x| = |-x|$
- ▶ $-|x| \leq x \leq |x|$
- ▶ $|x| \leq r$ se e solo se $-r \leq x \leq r$ r reale positivo.
- ▶ $|x| < r$ se e solo se $-r < x < r$, r reale positivo.

- ▶ $|xy| = |x||y|$
- ▶ $|x + y| \leq |x| + |y|$
- ▶ $||x| - |y|| \leq |x - y|$
- ▶ $|x| = |y|$ se e solo se $x^2 = y^2$,
 $|x| < |y|$ se e solo se $x^2 < y^2$.

Dati N numeri reali a_k , $k \in \mathbb{N}$, dimostrare

$$\left| \sum_{k=1}^N a_k \right| \leq \sum_{k=1}^N |a_k|$$

Il principio di Induzione

In *Arithmetices principia* Peano introduce i numeri naturali $\mathbb{N}$ dando le seguenti regole

- ▶ 1 è un numero $\in \mathbb{N}$,
- ▶ Il successivo di un numero $\in \mathbb{N}$ è un numero $\in \mathbb{N}$,
- ▶ 1 non è successivo di nessun numero $\in \mathbb{N}$,
- ▶ se i successivi di due numeri $\in \mathbb{N}$ sono uguali, anche i due numeri sono uguali,
- ▶ Se un insieme A contiene il numero 1 e il successivo di ogni suo elemento, allora $A = \mathbb{N}$,

Gli assiomi riguardano l'operazione del passaggio da un numero naturale al suo successivo, l'ultimo dei quali particolarmente importante nel definire le operazioni in $\mathbb{N}$. Esso è il principio di induzione. Data una proposizione $\mathcal{P}(n)$, con $\mathcal{P}(1)$ vera se **dall'assumere $\mathcal{P}(n)$ vera** (ipotesi induttiva), risulterà $\mathcal{P}(n+1)$ vera, allora la proposizione sarà vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dimostrare per esercizio

La disuguaglianza di Bernoulli e altri casi

Spesso alla base di dimostrazioni di teoremi, la disuguaglianza di Bernoulli asserisce che

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1.$$

Proof.

La disuguaglianza è verificata per $n = 1$. **Assumendo vera la disuguaglianza al passo n** si ha

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \geq 1+(n+1)x.$$



Dimostrare al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$|x^n| = |x|^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Disuguglianze

Introduciamo il simbolo ! (fattoriale di n): è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ che agisce cos`ì

$$1! = 1, \quad n! = n(n-1)!$$

Esempio :

$$5! = 5(4!) = 5 \cdot 4(3!) = 5 \cdot 4 \cdot 3(2!) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2(1!) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Dimostriamo tramite il principio di induzione

$$n! \geq 2^{n-1}, \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Proof.

Per $n = 1$ è verificata. **Assumendo vera la disuguaglianza al passo n** , si ha

$$(n+1)! = n!(n+1) \geq 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$$

Dimostriamo tramite il principio di induzione

$$2^n > n, \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Proof.

Per $n = 1$ è verificata. **Assumendo vera la disuguaglianza al passo n** , si ha

$$2^{n+1} = 2^n 2 > 2n \geq n + 1.$$



Sia $a \geq 1$. Dimostrare che

$$\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proof.

Prendendo $x = \frac{a-1}{n}$, applichiamo la disuguaglianza di Bernoulli

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq a,$$

passando alla radice n -esima si ha il risultato. □

Un altro caso

Se il prodotto di n numeri reali e positivi è uguale ad 1, la loro somma risulta $\geq$ di n . Dim. Il risultato è vero per $n = 1$. Supponiamo che $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ e dimostriamo che se

$$x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} = 1,$$

allora

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1.$$

Se

$$x_1 x_2 + \cdots + x_n x_{n+1} = 1,$$

allora

- ▶ tutti i fattori sono uguali. Quindi sono tutti uguali ad 1 e la loro somma vale $n + 1$, e il risultato è dimostrato.
Se non,
- ▶ Esisterà almeno un fattore più piccolo di 1 ed un fattore più grande di 1.

Supponiamo

$$x_1 < 1, \quad x_{n+1} > 1.$$

Poniamo

$$y_1 = x_1 x_{n+1},$$

abbiamo

$$y_1 x_2 \cdots x_n = 1,$$

possiamo dunque applicare il risultato assunto vero al passo n , ne segue

$$y_1 + x_2 \cdots + x_n \geq n,$$

ma

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 \cdots x_n + x_{n+1} &= (y_1 + x_2 \cdots x_n) + x_{n+1} - y_1 + x_1 \geq \\n + 1 + x_{n+1} - y_1 + x_1 - 1 &= n + 1 + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 - 1 = \\n + 1 + (x_{n+1} - 1)(1 - x_1)\end{aligned}$$

Poichè

$$(x_{n+1} - 1)(1 - x_1) \geq 0,$$

il risultato è dimostrato al passo $n + 1$.

Theorem

Siano dati $x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_n$, non negativi, $n \in \mathbb{N}$. La media geometrica M_g è il numero

$$M_g := (x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

La media aritmetica M_a è il numero

$$M_a := \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

Si ha

$$M_a \geq M_g.$$

Proof.

Consideriamo $\frac{x_1}{M_g}, \dots, \frac{x_2}{M_g}, \frac{x_n}{M_g}$, allora la radice ennesima del prodotto vale 1 ossia $\frac{x_1}{M_g} \frac{x_2}{M_g} \cdots \frac{x_n}{M_g} = 1$, e per il risultato precedente $\frac{x_1}{M_g} + \frac{x_2}{M_g} + \frac{x_n}{M_g} \geq n$, ossia $M_a \geq M_g$. □

Diamo un'altra dimostrazione per induzione che fa uso della disuguaglianza di Bernoulli

- Per $n = 1$ la disuguaglianza è vera risultando

$$x_1 = x_1$$

- Supponiamo che al passo $n - 1$ risulti

$$M'_g = \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1} = M'_a$$

Si ha

$$M_a = \frac{(n-1)}{n} M'_a + \frac{x_n}{n} = \left(M'_a + \frac{(x_n - M'_a)}{n} \right),$$

$$\frac{M_a}{M'_a} = \left(1 + \frac{x_n - M'_a}{M'_a} \frac{1}{n}\right), \quad \left(\frac{M_a}{M'_a}\right)^n = \left(1 + \frac{x_n - M'_a}{M'_a} \frac{1}{n}\right)^n$$

Per applicare la disuguaglianza di Bernoulli dovrà risultare
 $-M'_a + x_n \geq -nM'_a$ ossia $(n-1)M'_a + x_n \geq 0$, che risulta verificata.



$$\left(\frac{M_a}{M'_a}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x_n - M'_a}{M'_a}\right) = \frac{x_n}{M'_a}$$
$$(M_a)^n \geq x_n (M'_a)^{n-1},$$

e quindi per l'ipotesi induttiva

$$(M_a)^n \geq x_n (M'_g)^{n-1} = x_1 \cdot x_2 \dots x_n = \prod_{i=1}^n x_i = (M_g)^n.$$

e la dimostrazione è completa

Disuguaglianza di Young per esponenti razionali

Come applicazione della disuguaglianza tra la media aritmetica e geometrica dimostriamo la disuguaglianza di Young per esponenti razionali.

Definition

Dato $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$ diciamo coniugato di p il numero reale q tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Se $p = \frac{n}{m}$, $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ il coniugato di p è dato da

$$q = \frac{n}{n - m}.$$

Theorem

Disuguaglianza di Young (esponenti razionali): dati due numeri reali positivi x e y , e dati p, q numeri razionali verificanti

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si ha

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Proof.

Dalla disuguaglianza sulle medie

$$(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Fissiamo

$$x_1 = x_2 = \dots x_m = x^p \quad x_{m+1} = \dots x_n = b^q$$

Fissiamo $p = \frac{n}{m}$ con $m < n$, segue che il coniugato di p è dato da $q = \frac{n}{n-m}$. allora

$$((x^p)^m (y^q)^{n-m})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{mx^p + (n-m)y^q}{n}$$

$$((x^p)^{\frac{m}{n}} (y^q)^{\frac{n-m}{n}})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{m}{n} x^p + \frac{n-m}{n} y^q,$$

segue allora la disuguaglianza.



Formula del binomio

Definiamo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dimostrare per esercizio, per $1 \leq k \leq n$, ($0! = 1$, per convenzione.)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Applicare la formula precedente per costruire il triangolo di Tartaglia Dimostrare per induzione

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

per ogni coppia di numeri reali a e b .

Dim. L'asserto è vero per $n = 1$. Assumendo vera la formula al passo n la dimostriamo al passo $n + 1$. Vogliamo dimostrare che

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)^n(a + b) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) (a + b) =$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} =$$

$$\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + a^{n+1} + b^{n+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Esercizi

Dimostrare

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

$$(\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{2} - 1)^k,$$

Dimostrare tramite il principio di induzione

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Successioni limitate.

Definition

Una successione di numeri reali è un'applicazione dall'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali in $\mathbb{R}$:

$$n \in \mathbb{N} \longrightarrow x_n \in \mathbb{R}.$$

L'elemento $x_n \in \mathbb{R}$ è quindi l'immagine del numero $n \in \mathbb{N}$.

Una successione di numeri reali si dice inferiormente limitata se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $x_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$. Una successione di numeri reali si dice superiormente limitata se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Una successione si dice limitata se risulta inferiormente e superiormente limitata.

Una successione si dice
monotona crescente

$$x_{n+1} \geq x_n,$$

Esempio: 2^n .
monotona decrescente

$$x_{n+1} \leq x_n,$$

Esempio: $(\frac{1}{2})^n$.

Osserviamo che una successione può non essere monotona ma essere oscillante (esempio $(-1)^n$)

Dimostriamo che la successione

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

è monotona crescente.

Applicando la disuguaglianza

$$\sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1}$$

con

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{and} \quad a_{n+1} = 1,$$

otteniamo

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Ciò è equivalente a $x_n \leq x_{n+1}$. Quindi (x_n) è crescente ed è inferiormente limitata da $x_1 = 2$.

==

In più applicando la disuguaglianza

$$\sqrt[n+2]{a_1 \cdots a_{n+2}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n+2}}{n+2}$$

con

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{and} \quad a_{n+1} = a_{n+2} = \frac{1}{2}$$

otteniamo

$$\sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{n+2}{n+2} = 1.$$

Equivalente a $x_n \leq 4$. Quindi (x_n) è limitata superiormente da 4.

$$e = \sup_n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$$

Il numero e è la base dei logaritmi naturali

$$e \approx 2.7182818284590452353602874713527.....$$

Esercizio. Dimostrare $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è limitata

Proof.

$$0 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < 8$$



La successione

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

è decrescente.

Proof.

Abbiamo Per $n > 1$ consideriamo il quoziente

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} =$$

$$\frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+2} \geq \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\iff$$

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+2} \geq \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Applicazione della disuguaglianza di Bernoulli.

Successioni divergenti positivamente e negativamente

Definition

Una successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ si dice *divergente positivamente*, se per ogni numero reale $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > \nu \implies x_n > M.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

Definition

Una successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ si dice *divergente negativamente*, se per ogni numero reale $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > \nu \implies x_n < -M.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Esempio di successione divergente positivamente : $x_n = 2^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$$

Esempio di successione divergente negativamente : $x_n = \ln \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{n} = -\infty$$

Definition

Si dice che la successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ *converge* al numero reale l , se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $n > \nu \implies |x_n - l| < \varepsilon$. In simboli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l,$$

che si legge *limite di x_n rispetto a n uguale ad l* .

Poichè $|x_n - l| < \varepsilon$ equivale a

$$-\varepsilon < x_n - l < \varepsilon,$$

cioè

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon,$$

si può anche scrivere

$$n > \nu \implies l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon.$$

Esempio di successione convergente : $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

La funzione parte intera, nota anche come funzione floor (dalla parola inglese floor che significa pavimento), è la funzione che associa ad ogni numero reale x il più grande intero minore o uguale a x .

La parte intera superiore, nota anche come funzione ceil (dalla parola inglese ceiling che significa soffitto), definita nel modo seguente: per ogni numero reale x $\text{ceil}(x)$ è il più piccolo intero non minore di x . Esempio, $\text{ceil}(2.7) = 3$, $\text{ceil}(2) = 2$

UNICITA' DEL LIMITE Una successione convergente non può avere limiti distinti Dimostrare.

Una successione convergente é limitata. Dimostrare.

Teorema

Se $(x'_n)_\mathbb{N}$ e $(x''_n)_\mathbb{N}$ sono successioni regolari (cioè successioni che ammettono limite $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), si ha

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 x'_n + c_2 x''_n) = c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n,$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n \cdot x''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n,$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n}{x''_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n},$

in tutti i casi in cui il secondo membro ha significato in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Forme Indeterminate

Se $x'_n \rightarrow -\infty$ e $x''_n \rightarrow +\infty$, allora $x'_n + x''_n$ non può essere inquadrata in nessuno dei casi già considerati.

Questo rientra infatti tra quelli in cui il secondo membro $-\infty + (+\infty)$ non ha significato in $\tilde{\mathbb{R}}$.

Facciamo vedere, per mezzo di esempi, come la successione $x'_n + x''_n$ può essere di qualunque tipo.

$$x'_n = -n, x''_n = n \quad x'_n + x''_n = 0, \text{ convergente};$$

$$x'_n = -n, x''_n = n + (-1)^n \quad x'_n + x''_n = (-1)^n, \text{ non regolare};$$

$$x'_n = -n, x''_n = n^2 \quad x'_n + x''_n = (n-1)n, \rightarrow +\infty;$$

$$x'_n = -n^3, x''_n = n^2 \quad x'_n + x''_n = n^2(1-n), \rightarrow -\infty.$$

Per questo motivo quando

$$\begin{cases} x'_n \rightarrow -\infty \\ x''_n \rightarrow +\infty \end{cases}$$

si dice che la successione

$$x'_n + x''_n$$

si presenta sotto la forma indeterminata $\boxed{\infty - \infty}$.

Analoghe considerazioni valgono per $x'_n - x''_n$ se $x'_n \rightarrow +\infty$ e $x''_n \rightarrow +\infty$ o anche se $x'_n \rightarrow -\infty$ e $x''_n \rightarrow -\infty$.

► Se

$$\begin{cases} x'_n \rightarrow 0 \\ x''_n \rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

la successione

$$x'_n \cdot x''_n,$$

si presenta nella forma indeterminata $\boxed{0 \cdot \infty}$.

► Se invece

$$\begin{cases} x'_n \rightarrow \pm\infty \\ x''_n \rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

si dice che la successione

$$\frac{x'_n}{x''_n},$$

si presenta nella forma indeterminata

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}.$$

► Quando, infine

$$\begin{cases} x'_n \rightarrow 0 \\ x''_n \rightarrow 0 \end{cases}$$

si dice che la successione

$$\frac{x'_n}{x''_n},$$

si presenta nella forma indeterminata $\boxed{\frac{0}{0}}$.

Il teorema del confronto

Theorem

Siano x_n , y_n , e z_n tre successioni.

- ▶ *Se $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$, $z_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$, e $x_n \leq y_n \leq z_n$, allora $y_n \rightarrow x$*
- ▶ *Se $y_n \rightarrow +\infty$ e $x_n \geq y_n$, allora $x_n \rightarrow +\infty$.*
- ▶ *Se $y_n \rightarrow -\infty$ e $x_n \leq y_n$, allora $x_n \rightarrow -\infty$.*

Esempio.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Dall'identità

$$\left[\left((n)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) + 1 \right]^n = n$$

Dalla formula del binomio,

$$\left[\left((n)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) + 1 \right]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left((n)^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^k,$$

considerando nella somma unicamente l'addendo ottenuto per $k = 2$, otteniamo

$$\frac{n(n-1)}{2} \left((n)^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^2 < n,$$

quindi

$$0 \leq (n)^{\frac{1}{n}} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad 1 \leq (n)^{\frac{1}{n}} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

Concludiamo passando al limite.

Calcolo di limiti

Sia x_n una successione a termini positivi. Posto

$$y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

si ha: se $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n < 1$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Applicazione. $x > 1, c > 0, n \in \mathbb{N}$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^c}{x^n} = 0$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Successione non regolare

Definizione. Una successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ si dice *non regolare* o *oscillante* se non ammette limite.

Esempio di successione non regolare: $x_n = (-1)^n$ non esiste il $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$

Dato l'applicazione $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. $i(k) = j$ con $i(k+1) > i(k)$, una successione estratta è la successione ristretta a $i(k)$. Se x_n converge a $x \in \mathbb{R}$ (oppure diverge positivamente o negativamente) allora ogni estratta di x_n converge a x (oppure diverge positivamente o negativamente).

Example

Non esiste il $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ perchè calcolata nell'estratta di indici pari la sottosuccessione converge a 1, nell'estratta di indici dispari la sottosuccessione converge a -1 .

Permanenza del segno per successioni

Sia $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ con $l > 0$ allora esiste ν tale che $x_n > 0$ per $n > \nu$.

Sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l \qquad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = l'$$

- ▶ Se $x_n < 0$ per ogni n allora $l \leq 0$. Ricordare l'esempio $x_n = -\frac{1}{n}$
 $x_n < 0$ per ogni n ma $l = 0$
- ▶ Se $x_n \leq 0$ per ogni n allora $l \leq 0$.
- ▶ Se $x_n \leq y_n$ per ogni n allora $l \leq l'$

Dimostrare che se per x, y reali risulta $x < y + \frac{1}{\sqrt{n}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $x \leq y$.

Il teorema fondamentale sulle successioni monotone

Theorem

Se x_n è crescente e superiormente limitata allora

$$\sup_n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Se x_n è decrescente e inferiormente limitata allora

$$\inf_n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Se x_n è crescente e superiormente non limitata allora

$$\sup_n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

Se x_n è decrescente e inferiormente non limitata allora

$$\inf_n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

Supponiamo, per fissare le idee, che $(x_n)_{\mathbb{N}}$ sia crescente. Se non è limitata, non lo è superiormente. Infatti x_1 è un minorante. Comunque si scelga un numero $M \in \mathbb{R}$ esiste un elemento della successione, x_ν , tale che $x_\nu > M$. Per ogni $n > \nu$ si avrà $x_n \geq x_\nu > M$ e questo significa $x_n \rightarrow +\infty$.

Se $(x_n)_{\mathbb{N}}$ è limitata, avrà estremo superiore $e_M \in \mathbb{R}$. Per le proprietà dell'estremo superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un termine della successione, sia x_ν , tale che $x_\nu > e_M - \varepsilon$. Per $n > \nu$ si avrà $x_n \geq x_\nu$ e $x_n \leq e_M$. Perciò da $n > \nu$ segue

$$e_M - \varepsilon < x_\nu \leq x_n < e_M + \varepsilon.$$

Ciò significa $x_n \rightarrow e_M$.

In modo analogo si prova l'altro caso.

Come esercizio sul teorema fondamentale sulle successioni monotone provare il teorema nel caso di successioni decrescenti e limitate. (suggerimento $l' = \inf_n x_n$. Per definizione di estremo inferiore $x_n \geq l'$, per ogni n ; inoltre $\forall \epsilon > 0$ esiste ν tale che $x_\nu - \epsilon < l'$. Ma $x_\nu \leq x_n$ se $n > \nu$).

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1$$

Da cui, passando al limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

Tenuto conto dell'esercizio precedente calcoliamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

Abbiamo che non esiste il limite della successione

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^n & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

r.

Il termine generale della successione si può anche scrivere

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n & \text{se } n \text{ è pari} \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Successioni di Cauchy

$x_1, x_2, x_3, \dots$ di numeri reale si dice di Cauchy se per ogni numero reale e positivo ε , esiste un intero positivo N tale che per tutti gli interi positivi m e n con $m, n > N$, risulta

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

Ricordiamo: non è sufficiente che ogni termine sia arbitrariamente vicino al termine precedente per avere una successione di Cauchy.

Prendiamo

$$a_n = \sqrt{n},$$

ogni termine è arbitrariamente vicino al termine precedente:

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Comunque con crescenti valori di m , i termini $a_m - a_n$ diventano arbitrariamente grandi. Per ogni indice n e per ogni numero reale $\gamma > 0$, esiste un indice m grande abbastanza tale che $a_m - a_n > \gamma$. (Prendi $m > (\sqrt{n} + \gamma)^2$.) La successione $a_n = \sqrt{n}$, non è una successione di Cauchy.

Ogni successione di Cauchy di $\mathbb{R}$ è convergente in $\mathbb{R}$

Completo: non ci sono "punti mancanti" nell'insieme. L'insieme dei numeri razionali con la metrica Euclidea non è completo: si può costruire una successione di Cauchy di numeri razionali che convergono a un numero $\notin \mathbb{Q}$.

Serie

$$x_1 + x_2 + \dots x_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots x_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

- Se la serie è convergente allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

- Teorema sulle serie a termini non negativi: una serie a termini non negativi non può essere indeterminata: è convergente oppure divergente positivamente.

Non è semplice calcolare la somma di una serie. Si studia il carattere della serie cercando di stabilire se la serie converge oppure no

Serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ridotta n -sima

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

Se $x = 1$ si ha

$$s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Sia $x \neq 1$. Si ha

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Se $|x| < 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ e pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Ricordiamo: teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima

Se $x > 1$, poichè $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x^n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

Sia ora $x = -1$,

$$s_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2p \\ 1, & n = 2p + 1 \end{cases}$$

Pertanto la successione $(s_n)_{\mathbb{N}}$ non è regolare.

Sia infine $x < -1$. Possiamo scrivere $x = -|x|$, e quindi

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1 - (-|x|)^n}{1 + |x|} = \frac{1 - (-1)^n |x|^n}{1 + |x|} \\ &= \begin{cases} \frac{1 - |x|^{2p}}{1 + |x|}, & n = 2p \\ \frac{1 + |x|^{2p-1}}{1 + |x|}, & n = 2p - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ne segue che $s_{2p} \rightarrow -\infty$ e $s_{2p-1} \rightarrow +\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & x \in (-1, 1) \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

$$1,5 = 15/10 = 3/2$$

Funzione generatrice di un numero decimale periodico.

Calcoliamo la frazione generatrice di $1,\bar{5}$

$$1,\bar{5} = 1 + 5(10)^{-1} + 5(10)^{-2} + \dots + 5(10)^{-n} + \dots = 1 + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 1 + \frac{5}{9}$$

$$\frac{14}{9}$$

Calcoliamo ora la frazione generatrice di $1,8\bar{5}$

$$\begin{aligned} 1,8\bar{5} &= 1 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \dots + = \\ &= 1 + \frac{4}{5} + 5 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 1 + \frac{4}{5} + \frac{5}{90} = \frac{167}{90} \end{aligned}$$

Dimostrare che la frazione generatrice di $0.\overline{5}$ è uguale a $5/9$
Soluzione.

$$0,\overline{5} = 5(10)^{-1} + 5(10)^{-2} + \dots + 5(10)^{-n} + \dots =$$

$$0 + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{5}{9}$$

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

$$1 + s_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

Successione monotona crescente limitata

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

$$1 + s_n = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \dots n}\right) \leq$$

$$1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Dalla formula del binomio di Newton

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!}$$

Osserviamo per $k \geq 1$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n \dots n_{k\text{-volte}}}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n \dots n_{k\text{-volte}}} = 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\dots \leq 1.$$

Allora,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!},$$

la prima disuguaglianza segue passando al limite

Prendiamo $n + p$ con p intero positivo. Allora

$$1 + \sum_{k=1}^{n+p} \frac{(n+p)(n+p-1)(n+p-2)\dots(n+p-k+1)}{(n+p)^k} \frac{1}{k!}$$
$$\geq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(n+p)(n+p-1)(n+p-2)\dots(n+p-k+1)}{(n+p)^k} \frac{1}{k!}$$

Da cui passando al limite su p e osservando che

$$1 = \lim_p \frac{(n+p)(n+p-1)(n+p-2)\dots(n+p-k+1)}{(n+p)^k}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+p}\right)^{n+p} \rightarrow e \quad p \rightarrow +\infty$$

$$e \geq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

Allora passando al limite su n otteniamo l'altra disuguaglianza, e quindi l'uguaglianza.

Approssimazione di e .

$$e \approx 2,71828$$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Calcoliamo

$$\sum_{k=0}^{n+m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \frac{1}{(n+m)!} =$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \cdots \frac{1}{(n+2) \cdots (n+m)} \right) \leq$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} \right) < \frac{1}{nn!}$$

Allora per $m \rightarrow +\infty$, troviamo

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!},$$

disuguaglianza che consente il calcolo approssimato di e .

e non è un numero razionale

Proof.

Sappiamo $e > 2$. Ricordiamo

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!},$$

per $n = 1$ si ha $e < 3$; assumiamo per contraddizione che e sia un numero razionale $e = \frac{p}{q}$ con p, q interi positivi primi tra loro e $q > 1$. Allora

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < \frac{1}{qq!},$$

e

$$0 < q! \left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) < \frac{1}{q},$$

e otteniamo una contraddizione poichè il primo membro è un intero positivo e il secondo membro è un numero minore di uno. □

Serie armonica

Si chiama *serie armonica* la serie di termine generale $x_n = 1/n$.

Theorem

La serie armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

diverge positivamente.

Consideriamo per $k \in \mathbb{N}$

$$x_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

Allora $e \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ Poichè la funzione $\ln x$ è crescente in $(0, +\infty)$

$$1 = \ln e \geq k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Da cui

$$\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln k$$

Facendo le somme da 1 a n

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1)$$

In conclusione $s_n \geq \ln(n+1)$ e quindi la serie armonica diverge per il teorema di confronto sulle successioni.

Importante notare Per la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

è verificata la condizione $x_n \rightarrow 0$; questa condizione è perciò necessaria, ma non è sufficiente per la convergenza della serie.

Teorema (criterio del confronto asintotico)

Sia x_n una successione a termini non negativi per cui esiste il limite
e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = l \neq 0.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$$

Esempio Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è positivamente divergente

Serie armonica generalizzata

Per p numero reale e positivo. La serie armonica generalizzata è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} +\infty & p \leq 1 \\ < \infty & p > 1 \end{cases}$$

Dimostrazione del caso di convergenza

La successione delle ridotte n -sime è regolare, pertanto per valutarne il limite possiamo considerare una sottosuccessione.

$$s_{2^h-1} = 1 + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right] + \dots + \left[\frac{1}{(2^{h-1})^p} + \frac{1}{(2^{h-1}+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^h-1)^p} \right] <$$

$$1 + 2 \frac{1}{2^p} + 4 \frac{1}{4^p} + \dots + 2^{h-1} \frac{1}{(2^{h-1})^p} = \sum_{k=1}^h \left[\frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}} \right] <$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}} \right] < +\infty$$

teorema (criterio del confronto asintotico) Sia p un numero reale e positivo. Supponiamo $p \leq 1$. Sia x_n una successione a termini non negativi tale che per cui esiste il limite e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p x_n = l \neq 0.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$$

Esempio

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è positivamente divergente.

Teorema (criterio del confronto asintotico) Sia $p > 1$ un numero reale. Sia x_n una successione a termini non negativi tale che per cui esiste il limite in $\mathbb{R}$ di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p x_n$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$$

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente per $\alpha > \frac{1}{2}$ ($\iff 2\alpha > 1$) e divergente per $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Criterio del confronto

Consideriamo le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$$

con $0 \leq x_n \leq y_n \quad \forall n$. Si ha



$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ converge}$$



$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ diverge} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \text{ diverge}$$

Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1}.$$

La serie è convergente, infatti

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

.

Studiare la convergenza applicando il confronto asintotico.

Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!}.$$

r.Abbiamo

$$\frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!} \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Dunque la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!}$$

è positivamente divergente.

Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

r. La serie è divergente.

$$\sqrt{k^2 + 1} \leq \sqrt{k^2 + 1 + 2k} = k + 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty.$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \geq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty.$$

Studiare la convergenza applicando il confronto asintotico.

Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k.$$

r. La serie è positivamente divergente. Infatti

$$\frac{1}{k} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \geq \frac{2}{k}.$$

Il risultato segue allora dal confronto con la serie armonica.

Criterio del rapporto

Data una serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ tale che esista il limite

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = l, \text{ con } x_n \neq 0 \text{ per } n \text{ grande,}$$

si ha

- ▶ se $l > 1$ la serie diverge
- ▶ se $l < 1$ la serie converge
- ▶ non ne stabilisce il comportamento $l = 1$.

Criterio della radice

Data una serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ tale che esista il limite

$$\lim x_n^{1/n} = l,$$

- ▶ se $l > 1$ la serie diverge
- ▶ se $l < 1$ la serie converge
- ▶ non ne stabilisce il comportamento $l = 1$.

Esercizio Sia $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$. Allora

- ☐ a La serie converge
- ☐ c Nessuna delle precedenti

- ☐ b La serie diverge

Esercizio Sia $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x_n+1} \right)^n$ una serie tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ e $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Allora

☐ a La serie converge

☐ b La serie diverge

☐ c Nessuna delle precedenti

Dopo aver determinato dalla formula ricorsiva

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \frac{e}{n+1} \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

l'espressione di x_n , studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} x_n.$$

r. Si ha

$$x_n = \frac{e^n}{n!}.$$

Si può procedere alla dimostrazione utilizzando il principio di induzione. La formula è vera al primo passo e se supponiamo che sia vera per $n - 1$, ossia $x_{n-1} = \frac{e^{n-1}}{(n-1)!}$, si ha $x_n = x_{n-1} \frac{e}{n}$. Dal passo $n - 1$ si ricava

$$x_n = \frac{e^{n-1}}{(n-1)!} \frac{e}{n} = \frac{e^n}{n!},$$

da cui l'asserto.

Si tratta ora di studiare la convergenza della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$. È verificata la condizione necessaria per la convergenza $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n!} = 0$. La serie è a termini positivi. Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{e^n} = \frac{e}{n+1} \rightarrow 0$$

Criterio di Cauchy per le serie

Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$$

converga è che per ogni $\epsilon > 0$ esista un indice $\nu > 0$ tale che

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right| < \epsilon,$$

per ogni $n > \nu$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$.

Convergenza assoluta

Consideriamo le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$$

Si ha

►

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ converge}$$

►

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ converge} \not\implies \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \text{ converge}$$

Per avere due serie differenti nel carattere, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ dovrà contenere un numero infinito di cambi di segno. Una serie prototipo di questo tipo è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

è convergente.

Criterio di Leibniz

Vale il Criterio di Leibniz

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia x_n positivo, decrescente e infinitesimo. Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x_n$$

converge.

I numeri complessi. L'unità immaginaria: il numero i

Non tutte le equazioni $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ hanno una soluzione nell'insieme dei numeri reali. Estendiamo i numeri reali affinché equazioni polinomiali $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ abbiano almeno una soluzione nell'estensione di $\mathbb{R}$ che indichiamo con $\mathbb{C}$ (chiusura algebrica di $\mathbb{R}$). In particolare l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$. Definiamo l'unità immaginaria i soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$. La proprietà del numero i è data dalla relazione

$$i^2 = -1.$$

Forma algebrica dei numeri complessi

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ corrisponde ad una coppia ordinata di numeri reali (x, y) . Definiamo forma algebrica di un numero complesso z

$$z = x + iy.$$

x e y sono rispettivamente la parte reale e il coefficiente dell'unità immaginaria, e vengono scritti tramite la notazione

$$x = \Re z \quad y = \Im z$$

La forma algebrica si presta facilmente all'operazione di somma.

Dati due numeri complessi $z = x + iy$ e $w = u + iv$
l'operazione di somma $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si definisce al seguente modo

$$(z, w) \rightarrow z + w = (x + u) + i(y + v)$$

Esempio: $z = 1 + i$ $w = 1 + 3i$.

Ricordiamo che

$$z = 0 \iff (x, y) = (0, 0).$$

Nell'operazione di prodotto $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si opera algebricamente sapendo che $i^2 = -1$.

$$zw = (xu - yv) + i(yu + xv)$$

Esempio: $z = 1 + i$ $w = 1 + 3i$.

$$zw = (1 + i)(1 + 3i) = 1 + i + 3i + 3(i^2) = 1 - 3 + 4i = -2 + 4i$$

L'opposto $-z$ è dato da

$$-z = -x - iy$$

Abbiamo

$$z = 0 \iff (x, y) = (0, 0).$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \text{ modulo di } z$$

la distanza nel piano xy del punto (x, y) da 0.

Notiamo che

$$|z| = 0 \text{ se e solo se } z = 0$$

Valgono le proprietà

$$|zw| = |z||w|$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

diseguaglianza triangolare

Calcolare il modulo del numero complesso

$$z = 1 + i$$

Esercizio

. Determinare la forma algebrica del numero complesso $\frac{z+i}{z-i}$

$$\begin{aligned}\frac{z+i}{z-i} &= \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)} = \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)} \frac{(x-i(y-1))}{(x-i(y-1))} = \\ &= \frac{x^2 + (y^2 - 1) - ix(y-1) + ix(y+1)}{x^2 + (y-1)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} + i \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}\end{aligned}$$

I numeri complessi si possono identificare con i punti del piano reale ed è particolarmente importante la simmetria rispetto all'asse delle ascisse espressa dall'operazione di coniugio $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dato $z = x + iy$ il coniugato di z è il numero complesso

$$\bar{z} = x - iy.$$

L'operazione di coniugio è una funzione complessa di variabile complessa che vediamo. Studiamone le proprietà.

Dato z e $w \in \mathbb{C}$, $z + w$ è un numero complesso, a cui possiamo applicare l'operazione di coniugio. Il risultato non cambia se consideriamo z e ne facciamo il coniugato, consideriamo w e ne facciamo il coniugato, e poi sommiamo i due. In simboli


$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

Dato z e $w \in \mathbb{C}$ zw è un numero complesso, a cui possiamo applicare l'operazione di coniugio. Il risultato non cambia se consideriamo z e ne facciamo il coniugato, consideriamo w e ne facciamo il coniugato, e poi moltiplichiamo i due. In simboli



$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

Inoltre se operiamo due volte l'operazione di coniugio otteniamo il numero di partenza.



$$\overline{\overline{z}} = z$$

Ha interesse considerare il prodotto di z per il suo coniugato $\bar{z}$. Mentre il prodotto di z con se stesso produce un nuovo numero complesso z^2 il prodotto di z per il suo coniugato $\bar{z}$ fornisce un numero reale.

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad (1)$$

essendo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} \text{ modulo di } z.$$

Notiamo che $|z| = 0 \iff z = 0$. Per $z \neq 0$ si ha

$$z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \quad \text{per cui} \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

da cui si ottiene la formula del reciproco.

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Valgono le relazioni

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Si ha una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi e i punti del piano cartesiano (piano di Gauss). In tale corrispondenza: $x = \Re(z)$ rappresenta l'ascissa di (x, y) e $y = \Im(z)$ rappresenta l'ordinata di (x, y) .

- ▶ I numeri della forma $x + 0i$, (i numeri reali) corrispondono ai punti dell'asse delle ascisse che detto asse reale, evidenziando che si ha $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- ▶ I numeri della forma $0 + iy = iy$, (immaginari puri) corrispondono ai punti dell'asse delle ordinate detto asse immaginario.
- ▶ Disegnare l'opposto di z e il coniugato di z .

Argomento di z in $(-\pi, \pi]$.

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Discutere l'argomento dei numeri complessi immaginari puri.

Forma trigonometrica dei numeri complessi

La rappresentazione nel piano dei numeri complessi permette una rappresentazione mediante coordinate polari *forma trigonometrica* di z . La forma trigonometrica è particolarmente utile nelle operazioni di prodotto e radice.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi)$$

Dato $z = x + iy$ si ha

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

dove $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$ e $\theta = \arg z$.

L'argomento θ è individuato a meno di multipli interi di 2π . Si ha quindi un insieme $\theta + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$. Osserviamo che se $\rho = 0$ (cioè $z = 0$) $\arg z$ resta indeterminato. Partendo dalla condizione $z_1 - z_2 = 0$ si ha

$$z_1 = z_2 \iff \Re z_1 = \Re z_2 \quad \Im z_1 = \Im z_2,$$

conseguentemente

$$z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \quad \arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi$$

Prodotto

Prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad r = |z| \quad \theta = \arg z$$

$$w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \rho = |w| \quad \varphi = \arg w$$

$$\begin{aligned} zw &= r\rho[(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta)] \\ &= r\rho[\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)] \end{aligned}$$

naturalmente

$$zw = |zw|[\cos(\arg(zw)) + i \sin(\arg(zw))]$$

Per cui

$$|zw| = |z||w| \qquad \arg(zw) = \arg z + \arg w.$$

Esercizio

- . Utilizzando il principio di induzione dimostrare

$$z^n = |z|^n (\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z)), \quad n \in \mathbb{N}$$

Esercizio

Calcolare $(1 + i)^8$. Il numero complesso $1 + i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$|z^8| = |z|^8 = 16$$

-indent

$$\arg(z^8) = \frac{\pi}{4}8 + 2k\pi = 2\pi + 2k\pi$$

$$(1 + i)^8 = 16$$

Forma esponenziale di un numero complesso

Notiamo che la funzione $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ verifica $f(\theta)f(\varphi) = f(\theta + \varphi)$ Tale proprietà è tipica dell'esponenziale. Poniamo

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

e la scrittura

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Notiamo che $|e^{i\theta}| = 1$, infatti $|e^{i\theta}| = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Definizione di esponenziale in $\mathbb{C}$.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$|e^z| = e^x \quad \arg e^z = y + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Osserviamo che moltiplicare z per $e^{i\varphi}$ equivale a far effettuare a z una rotazione di φ .

Formula di triplicazione. Per $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos 3x + i \sin 3x &= (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \\ &= \cos^3 x - i \sin^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \sin^2 x \cos x.\end{aligned}$$

Uguagliando la parte reale e la parte immaginaria dei due numeri

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\sin(3x) = -\sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x$$

Radici n -sime di un numero complesso

$$z = w \iff \Re z = \Re w, \quad \Im z = \Im w$$

oppure

$$z = w \iff |z| = |w| \quad \arg z = \arg w + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Diciamo w radice n -sima di z se e solo se $w^n = z$.
Supponiamo $z \neq 0$, allora

$$w = |w|e^{i\varphi} \qquad z = |z|e^{i\theta}$$

$$w^n = |w|^n e^{in\varphi} = |z|e^{i\theta}$$

quindi

$$|w|^n = |z| \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad \text{ossia}$$

$$\begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}(2\pi) \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

al variare di k le radici n -sime *non* sono infinite; ma vi sono solo n radici distinte perchè poi i valori si ripetono.

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

Geometricamente: le radici n -esime di un numero complesso si dispongono, a partire dall'angolo $\frac{\theta}{n}$, sulla circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z|}$ e centro l'origine ai vertici di un poligono regolare di n lati inserito nella circonferenza. Dopo n passi si ritorna nella posizione di partenza.

Esercizio

In $\mathbb{C}$ per ogni intero positivo n esistono esattamente n radici n -esime dell'unità e sono nella forma

$$r_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = e^{2\pi i k/n}$$

con $0 \leq k \leq n-1$.

Esse si dispongono nel piano complesso lungo la circonferenza unitaria, ai vertici di un poligono regolare con n lati che ha un vertice in $(1, 0)$.

Calcolare le radici cubiche di $z = 1$.

Calcolare le radici quadrate di $z = i$ e $z = -i$.

Verificare che le radici quadrate di un numero complesso non nullo sono una opposta all'altra.

$$\varphi_k = \frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{2} \quad k = 0, 1$$

$$w_0 = \sqrt{\rho} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$w_1 = \sqrt{\rho} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right)$$

Esercizio

Calcoliamo le radici quarte di 4 :

$$4 = 4e^{i0} = 4e^{(0+2k\pi)i}$$

$$\varphi_k = \frac{2k\pi}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$w_0, w_1, w_2, w_3 \quad |w_k| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$$

$$\arg w_0 = 0, \quad \arg w_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg w_2 = \pi \quad \arg w_3 = \frac{3}{2}\pi$$

$$w_0 = \sqrt{2}, \quad w_1 = \sqrt{2}i \quad w_2 = -\sqrt{2} \quad w_3 = -\sqrt{2}i$$

Esempi di funzioni

Dati due insiemi di numeri reali X e Y , f è una relazione che a ogni $x \in X$ ($X = \text{Dom}(f)$ dominio di f) fa corrispondere un unico $y = f(x) \in Y$.

$$f : X \rightarrow Y,$$

$\text{Im}(f)$ l'insieme dei punti $y \in Y$, ottenuti come $y = f(x)$.

$$\text{Im}(f) = \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\}$$

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

La funzione si dice *suriettiva* se $\text{Im}(f) = Y$ e *iniettiva* se

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ si ha } x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

È importante associare alla funzione

- ▶ X l'insieme di definizione
- ▶ Il grafico
- ▶ $Im(f)$

- ▶ Traslazioni in x . $y = f(x + k)$, $k \in \mathbb{R}$, il grafico subisce una traslazione orizzontale, verso sinistra se $k > 0$, verso destra se $k < 0$.
- ▶ Traslazioni in y . $y = k + f(x)$, $k \in \mathbb{R}$, il grafico subisce una traslazione verticale, verso l'alto se $k > 0$, verso il basso se $k < 0$.

Funzione composta

$f : X \rightarrow Y$, $g : Z \rightarrow W$ e supponiamo $Y \subset Z$. Per ogni $x \in X$, si ha $f(x) \in Y \subset Z$,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = w \in W.$$

$g \circ f$ si dice funzione composta mediante f e g . L'operazione di composizione non è commutativa, ed è generalmente diverso $f \circ g$ da $g \circ f$.

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = x + 1$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2 + 2x$$

Funzione inversa

Sia $f : X \rightarrow Y$ iniettiva. Resta definita la funzione

$$f^{-1} : f(X) \rightarrow X$$

$$\forall y \in f(X), f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Le funzioni trigonometriche

Sia 2π la lunghezza della circonferenza di raggio 1. Al generico punto P appartenente alla circonferenza viene associato $(\cos x, \sin x)$, con le proprietà:

$$|\cos x| \leq 1, \quad |\sin x| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = -\sin(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \cos(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Dalla relazione $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, si osservi che le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ non si annullano mai contemporaneamente, pertanto non esistono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando per una costante reale positiva n l'argomento di una funzione trigonometrica, ossia considerando la funzione $f(nx)$, si determina una variazione del periodo da T a $\frac{T}{n}$.

La potenza di x . Per $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$ consideriamo

$$f(x) = x^n,$$

$$g(x) = n^x,$$

$$h(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

e distinguiamo il caso n pari e n dispari.

Per n pari, ad esempio $n = 2$

$$f(x) = x^2,$$

$$g(x) = x^{\frac{1}{2}},$$

$$h(x) = 2^x$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}, \quad \text{Dom}(h) = \mathbb{R},$$

$$\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \quad \text{Im}(g) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\},$$

$$\text{Im}(h) = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}.$$

Per n dispari, ad esempio $n = 3$

$$f(x) = x^3,$$

$$g(x) = x^{\frac{1}{3}},$$

$$h(x) = 3^x$$

$$\begin{array}{lll} \text{Dom}(f) = \mathbb{R}, & \text{Dom}(g) = \mathbb{R}, & \text{Dom}(h) = \mathbb{R} \\ \text{Im}(f) = \mathbb{R}, & \text{Im}(g) = \mathbb{R}, & \text{Im}(h) = \mathbb{R}_+ \end{array}$$

Al variare di $x \in \mathbb{R}$ consideriamo per $a > 1$

$$f(x) = a^x$$

Si dice logaritmo in base a di un numero x l'esponente da dare ad a per ottenere x .

$$x = a^y \iff y = \log_a x$$

(si legge: y il logaritmo in base a di x). Pensiamo al caso particolare

$$f(x) = 2^x$$

Logaritmi e proprietà dei logaritmi in base 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, , il logaritmo in base 2 ha la proprietà

$$2^{\log_2 x} = x.$$

Si ha

$$\log_2 1 = 0.$$

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$, vale

► $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$. Perchè

$$\log_2 xy = \log_2(2^{\log_2 x} 2^{\log_2 y}) = \log_2(2^{\log_2 x + \log_2 y}) = \log_2 x + \log_2 y$$

► $\log_2 \frac{1}{x} = -\log_2 x$. Perchè

$$0 = \log_2 1 = \log_2(xx^{-1}) = \log_2 x + \log_2 x^{-1},$$

$$-\log_2 x = \log_2 x^{-1}$$

► $\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 x - \log_2 y$.

$$\log_2 \frac{x}{y} = \log_2\left(x \frac{1}{y}\right) = \log_2 x + \log_2 \frac{1}{y} = \log_2 x - \log_2 y$$

- Per $n \in \mathbb{N}$, $\log_2 x^n = n \log_2 x$. Perchè

$$\log_2 x^n = \log_2 \underbrace{x \cdot x \dots x}_{n \text{ volte}} = \log_2 x + \log_2 x + \dots \log_2 x = n \log_2 x$$

- Per ogni $x \neq 0$, $\log_2 x^2 = 2 \log |x|$ Perchè se $x > 0$

$$\log_2 x^2 = \log_2 xx = \log_2 x + \log_2 x = 2 \log_2 x,$$

se $x < 0$ allora $-x > 0$

$$\log_2 x^2 = \log_2 (-x)(-x) = \log_2 (-x) + \log_2 (-x) = 2 \log_2 (-x),$$

ossia $x \neq 0$, $\log_2 x^2 = 2 \log |x|$

- per ogni x, y con $xy > 0$,
 $\log xy = \log |x| + \log |y|$. Perchè se $x > 0$ $y > 0$ allora

$$\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y,$$

se $x < 0$ $y < 0$ allora

$$\log_2 xy = \log_2 (-x)(-y) = \log_2 (-x) + \log_2 (-y)$$

La funzione $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ non è invertibile in $\mathbb{R}$. Possiamo renderla invertibile se limitiamo il suo dominio all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, in cui la funzione è monotona. La sua inversa è la funzione $f(x) = \arcsin(x)$.

La sua inversa $f(x) = \arcsin(x)$ è definita in $[-1, 1]$ a valori in $[-\pi/2, \pi/2]$

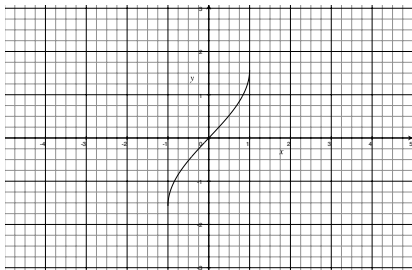


Grafico di $f(x) = \arcsin x$

La funzione $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ non è invertibile in $\mathbb{R}$. Possiamo renderla invertibile se limitiamo il suo dominio all'intervallo $[0, \pi]$, in cui la funzione è monotona. La sua inversa è la funzione $f(x) = \arccos(x)$. La sua inversa $f(x) = \arccos(x)$ è definita in $[-1, 1]$ a valori in $[0, \pi]$.

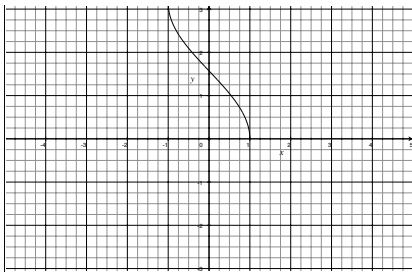


Grafico di $f(x) = \arccos x$

La funzione

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, è periodica di periodo π

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta.$$

È una funzione dispari

$$\tan(-x) = -\tan x$$

ed è ovunque crescente.

Per alcuni angoli noti

$$\tan 0 = 0 \quad \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Se restringiamo lo studio della funzione tangente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, utilizzando la stessa notazione per indicare la funzione in tale intervallo la funzione risulta iniettiva e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. La funzione tangente è invertibile: la funzione inversa è indicata con

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

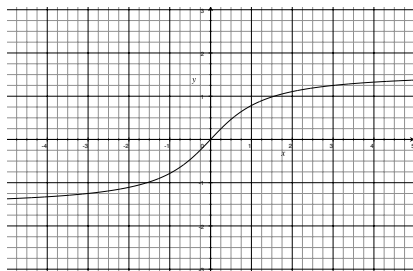


Grafico di $f(x) = \arctan x$

Limiti

- Limiti per $x \rightarrow +\infty$ di $f(x)$ (dominio di f superiormente illimitato)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists k > 0 : \forall x \in X, x > k \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

Esempio di funzione che ammette un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = \arctan x \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

La retta $y = \frac{\pi}{2}$ per $x \rightarrow +\infty$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0 \exists k > 0 : \forall x \in X, x > k \quad f(x) > M$$

Esempio di funzione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ricordiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

Limite definizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0 \exists k > 0 : \forall x \in X, x > k \quad f(x) < -M$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)^{1/3} = -\infty$$

Limiti per $x \rightarrow -\infty$ di $f(x)$ (dominio di f inferiormente illimitato)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists k > 0 : \forall x \in X, x < -k \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

Esempio di asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$

$$f(x) = \arctan x \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$a > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad (ay = x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (-y = x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \dots + b_r} = \frac{a_0}{b_0} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{k-r}.$$

Mettendo in evidenza la massima potenza del numeratore e del denominatore si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \dots + b_r} &= \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^k \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_k}{x^k} \right)}{x^r \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_r}{x^r} \right)} &= \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \dots + b_r} &= \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^k}{b_0 x^r} &= \frac{a_0}{b_0} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{k-r}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + bx + c} - x$$

$$x > 0$$

$$\sqrt{x^2 + bx + c} - x = (\sqrt{x^2 + bx + c} - x) \frac{\sqrt{x^2 + bx + c} + x}{\sqrt{x^2 + bx + c} + x} =$$

$$\frac{bx + c}{\sqrt{x^2 + bx + c} + x} = \frac{x(b + \frac{c}{x})}{\sqrt{x^2(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2})} + x} =$$

$$\frac{x(b + \frac{c}{x})}{x(\sqrt{(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2})} + 1)} = \frac{b}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0 \quad b > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{e^x} = 0 \quad b > 0$$


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0 \exists k > 0 : \forall x \in X, x < -k \quad f(x) > M$$

Esempio di funzione

$$f(x) = |x|, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$$


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0 \exists k > 0 : \forall x \in X, x < -k \quad f(x) < -M$$

$$f(x) = x^3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

Non esistono i seguenti limiti


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$$


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x.$$

Per dimostrare che il limite non esiste occorre trovare due successioni x_n e x'_n che tendono a $+\infty$, ma tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x'_n)$$

$$x_n = n\pi \quad x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$$

Per dimostrare che il limite non esiste occorre trovare due successioni x_n e x'_n che tendono a $+\infty$, ma tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sin(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n \sin(x'_n)$$

$$x_n = n\pi \quad x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$x_n \sin(x_n) = 0, \quad x'_n \sin(x'_n) \rightarrow +\infty$$

Esistono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x - x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x - x \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x - x \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 - x = +\infty$$

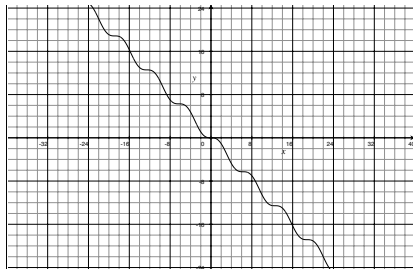


Grafico di $f(x) = \sin x - x$

Rispetto alle successioni, il concetto di limite per $x \rightarrow x_0$ di $f(x)$ è nuovo. Per avvicinarci a x_0 da punti x dobbiamo assumere x_0 punto di accumulazione per il dominio di f (ossia che in un qualunque intorno di x cadano infiniti punti del dominio di f da cui ci possiamo avvicinare)

► Si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\frac{\sin(x)}{x}$ è una funzione pari, è sufficiente considerare il caso $x > 0$
 inoltre, si può supporre $x < \frac{\pi}{2}$. Per tali valori di x si ha

$$0 < \sin x \leq x \leq \tan x$$

che, considerando i reciproci, implica

$$\frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Moltiplicando per $\sin x$ si ottiene

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x.$$

Quindi, dato che $\cos x$ tende a 1 per x che tende a zero, per il teorema del confronto il limite in mezzo ha lo stesso valore degli altri due.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Moltiplicando il denominatore e il numeratore per $1 + \cos(x)$ abbiamo che:

$$\frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{x^2(1 + \cos(x))} = \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2(1 + \cos(x))}$$

Ma $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2(1 + \cos(x))} =$$

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos(x)} =$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{1}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax}$$

Facendo un cambio di variabile $y = ax$ si ottiene che

$$\frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) < -M$$

► Limite destro

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < x - x_0 < \delta \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < x - x_0 < \delta \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < x - x_0 < \delta \quad f(x) < -M$$

► Limite sinistro

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, -\delta < x - x_0 < 0 \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, -\delta < x - x_0 < 0 \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, -\delta < x - x_0 < 0 \quad f(x) < -M$$

Se la funzione ammette limite allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

e viceversa. Per funzioni che non sono definite rispettivamente a sinistra o a destra di x_0 si può passare al limite solo da una direzione. Si distingue talvolta il limite sinistro dal limite destro.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Caso di non esistenza di limite per $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x},$$

infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Non esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

Verificare

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$y = \frac{1}{x}$. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha $y \rightarrow +\infty$ e Per $x \rightarrow 0^-$ si ha $y \rightarrow -\infty$.
Pertanto, considerando separatamente i due limiti, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

.

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (y = (1+x)^{\frac{1}{x}})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow e} \ln y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad (y = e^x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 1$$

Data $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I non vuoto, x_0 punto di accumulazione per I .

- ▶ Dare la definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$
- ▶ Dare la definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.
- ▶ Fare un esempio di una funzione f tale che $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ non esiste.

Simbolo di Landau: o piccolo

Il simbolo *o piccolo* $o(x)$ significa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

Valgono le seguenti proprietà

$$o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$$

Perchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n) + o(x^n)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

$$o(x^n) - o(x^n) = o(x^n)$$

Perchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n) - o(x^n)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-o(x^n)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

$$co(x^n) = o(cx^n) = o(x^n), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Perchè

$$c \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

Perchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(cx^n)}{x^n} = 0.$$

$$o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$$

Perchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)o(x^m)}{x^{n+m}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^m)}{x^m} = 0$$

$$o(o(x^n)) = o(x^n)$$

Perchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(o(x^n))}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(o(x^n))}{o(x^n)} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

Continuità

Sia dato un punto x_0 nell'insieme di definizione di una funzione f , con x_0 punto di accumulazione per il dominio di f .

f si definisce continua in x_0 se il suo limite per $\rightarrow x_0$ coincide con il suo valore in $f(x_0)$, ovvero con $f(x_0)$. In simboli:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè l'operazione di limite in x_0 commuta con la funzione f

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right).$$

Minimo e massimo assoluti per funzioni continue

Data $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ il minimo m e il massimo (assoluti) M di f , se esistono, sono valori del codominio di f , verificanti

$$f(x) \geq m \quad f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$$

Theorem

Teorema di Weierstrass *Una funzione continua su un insieme chiuso e limitato assume il massimo e il minimo assoluti.*

Il minimo e il massimo assoluti della funzione di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato sono da cercare agli estremi dell'intervallo a e b e all'interno dell'intervallo.

Teorema degli zeri

Una funzione continua su un insieme chiuso e limitato $[a, b]$ tale $f(a)f(b) < 0$ ammette almeno un punto interno x_0 a $[a, b]$ in cui $f(x_0) = 0$.

Vale il teorema dei valori intermedi.

Theorem

Una funzione continua su un insieme chiuso e limitato assume tutti i valori compresi tra il minimo m e il massimo assoluti M .

Proof.

Sia $p \in [m, M]$, Se p vale m o M il teorema è dimostrato.

Prendiamo $p \in (m, M)$. Sia x_m e x_M tale che

$$f(x_m) = m \quad f(x_M) = M$$

Allora

$$F(x) = f(x) - p,$$

è una funzione continua su un insieme chiuso e limitato, che vale

$$F(x_m) = f(x_m) - p < 0,$$

$$F(x_M) = f(x_M) - p > 0,$$

si ha che esiste (teorema degli zeri) un punto ξ per cui

$$F(\xi) = f(\xi) - p = 0,$$

ossia

$$f(\xi) = p$$

Si cercano massimi e minimi relativi in insiemi aperti. Data $f : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ il minimo m e il massimo M relativo di f , se esistono, sono valori del codominio di f , verificanti per r positivo e sufficientemente piccolo

$$f(x) \geq m \quad \forall x \in \{|x - x_0| < r\} \cap (a, b), \quad f(x_0) = m$$

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in \{|x - x_1| < r\} \cap (a, b), \quad f(x_1) = M$$