

ANALISI MATEMATICA I

Per gli studenti di Ingegneria dell'Energia Elettrica a.a. 2024-2025

Paola Loreti

December 19, 2024

Introduzione

Domanda: Chi è più grande tra e^π e π^e ? (Dimostrare)

Riferimento bibliografico: Ivan Niven The Two-Year College
Mathematics Journal, Vol. 3, No. 2. (Autumn, 1972), pp. 13-15.

Primi simboli

$\exists$	esiste
$\forall$	per ogni
$\in$	appartiene
$\cup$	unione insiemistica
$\cap$	intersezione insiemistica
$\emptyset$	insieme vuoto
ϵ	epsilon
δ	delta
$\mathbb{R}$	l'insieme dei numeri reali
$+\infty$	più infinito
$-\infty$	meno infinito
$\mathbb{R}$	Insieme dei numeri reali
$\mathbb{R}_+$	Insieme dei numeri reali positivi
$\mathbb{R}^*$	Insieme dei numeri reali con l'aggiunta di $-\infty$ e $+\infty$
$\mathbb{C}$	Insieme dei numeri complessi

Costanti fondamentali

$$e \approx 2.7182818284590452353602874713527$$

$$\pi \approx 3,141592653589793238462643383279$$

Prime nozioni

A e B due insiemi di un insieme ambiente S . Con $\emptyset$ si denota l'insieme vuoto

$\cup$ unione insiemistica

$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$$

► Per ogni A, B

$$A \cup B = B \cup A$$

► Per ogni A, B, C

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

► $\emptyset$ tale che per ogni A si ha

$$A \cup \emptyset = A$$

$\cap$ intersezione insiemistica

$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$$

- ▶ Per ogni A, B

$$A \cap B = B \cap A$$

- ▶ Per ogni A, B, C

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- ▶ $\emptyset$ tale che per ogni A

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Sia $A =$

$\{\text{Marrakesh, BuenosAires, St.Petersburg, Kyoto, NewYork, Santiago}\}$

e

$B =$

$\{\text{Toronto, St.Petersburg, Kyoto, Montreal, Barcelona, Vancouver, Halifax,}$

Trovare $A \cap B$ e $A \cup B$.

Per l'insieme dei numeri naturali si trova in letteratura la notazione

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

e

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

oppure

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.$$

Questa modalità descrive l'insieme tramite gli elementi che lo compongono, non è importante l'ordine in cui gli elementi vengono elencati.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$

perchè ogni numero naturale è anche un intero (non essendo vero il viceversa). L'insieme dei numeri razionali è descritto tramite la proprietà che i suoi elementi devono soddisfare

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}, \text{ con } n \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Le proprietà dei numeri reali

Si indica con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. In $\mathbb{R}$ sono definite le operazioni di *Addizione* e *Moltiplicazione* ed una *relazione d'ordine totale* $\leq$ (minore o uguale) con le seguenti proprietà

- ▶ Per ogni coppia di numeri reali a, b si ha

$$a + b = b + a$$

(proprietà commutativa dell'Addizione)

- ▶ Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

(proprietà associativa dell'Addizione)

- ▶ Esiste ed è unico l'elemento 0 (zero) tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$0 + a = a + 0 = a.$$

(esistenza dell'elemento neutro rispetto all'Addizione)

- ▶ Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un unico simmetrico rispetto all'Addizione, detto anche opposto, $-a \in \mathbb{R}$ tale che

$$a + (-a) = 0$$

- ▶ Per ogni coppia di numeri reali a, b si ha

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(proprietà commutativa della Moltiplicazione)

- ▶ Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(proprietà associativa della Moltiplicazione)

- ▶ Esiste ed è unico l'elemento 1 (uno), diverso da 0, tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

(esistenza dell'elemento neutro rispetto alla Moltiplicazione)

- ▶ Per ogni $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ esiste un unico simmetrico rispetto alla Moltiplicazione, detto l'inverso o il reciproco di a , indicato con a^{-1} o con $1/a$ tale che

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

- Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(proprietà distributiva della Moltiplicazione rispetto all'Addizione)

Si indica con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri $1, 2, \dots$, Si indica con $\mathbb{Z}$ (insieme degli interi) l'insieme dei numeri naturali unito con i loro opposti e lo 0. L'insieme $\mathbb{Q}$ è l'insieme delle frazioni di interi. Un generico elemento in $\mathbb{Q}$ è del tipo $\frac{m}{n}$, , con $n \neq 0$. Le proprietà algebriche descritte prima in (8) valgono in $\mathbb{Q}$. Come conseguenza dell'operazione di moltiplicazione in $\mathbb{R}$ è definita l'operazione **potenza**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con le proprietà seguenti

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Dato un numero reale $a \geq 0$ esiste ed è univocamente determinato il numero b **radice aritmetica** n -esima di a definita come

$$b = a^{1/n} \iff b^n = a$$

Ricordiamo che $+\infty$ e $-\infty$ **non** sono numeri reali.

Vale la *legge di cancellazione dell'addizione*

$$a + b = a + c \implies b = c$$

$$b = b + 0 = b + a - a = a + b - a = a + c - a = a - a + c = 0 + c = c$$

Vale *l'unicità dell'opposto*.

Supponiamo che esistano due opposti

$$a + (-a) = 0, \quad a + \alpha = 0. \text{ Allora}$$

$$a + (-a) = a + \alpha$$

Per la legge di cancellazione dell'addizione si ottiene $-a = \alpha$.

$$[1] \forall a \in \mathbb{R}, \quad a \cdot 0 = 0$$

$$[2] \forall a \in \mathbb{R}, \quad -(-a) = a$$

$$[3] \forall a \in \mathbb{R}, \quad (-1) \cdot a = -a$$

Proof.

[1] $a + a0 = a1 + a0 = a(1 + 0) = a = a + 0$, segue dalla legge di cancellazione dell'addizione.

[2] $a + (-a) = (-a) + a = 0$ a è l'opposto di $-a$, ossia $a = -(-a)$. per l'unicità dell'opposto

[3] $(-1)a + a = [-1 + 1]a = 0a = 0$, quindi $(-1)a$ è l'opposto di a . □

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ oppure } b = 0$$

Proof.

Se $a = 0$ oppure $b = 0$ si ha $a0 = 0$ per quanto precedentemente dimostrato. Se $ab = 0$ allora se $a = 0$ l'asserto è vero, se $a \neq 0$ allora $\exists a^{-1}$ tale che $aa^{-1} = 1$. Allora

$$b = b1 = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = aba^{-1} = 0a^{-1} = 0,$$

ossia $b = 0$.



La relazione $\leq$ è di ordine totale in $\mathbb{R}$ ossia, comunque si considerino due numeri reali a, b necessariamente deve aversi $a \leq b$ oppure $b \leq a$ e sono vere entrambe se e solo se $a = b$. Inoltre tale relazione $\leq$ è compatibile con le operazioni nel senso precisato dalle proprietà : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$0 \leq a \text{ e } 0 \leq b \implies 0 \leq a + b, \quad 0 \leq a \cdot b$$

Notazione: $a < b \iff a \leq b \text{ e } a \neq b$

Per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ vale una ed una sola delle seguenti relazioni

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

Ricordiamo che una disequazione può essere portata a una disequazione equivalente (ossia che ammette le stesse soluzioni)

- ▶ aggiungendo al primo e secondo membro uno stesso numero reale senza toccare il verso della disuguaglianza.
- ▶ moltiplicando primo e secondo membro per uno stesso numero reale **positivo** (i.e. > 0) senza toccare il verso della disuguaglianza.
- ▶ moltiplicando primo e secondo membro per uno stesso numero reale **negativo** (i.e. < 0) **cambiando** il verso della disuguaglianza

I numeri irrazionali

Ci sono numeri reali che non appartengono all'insieme $\mathbb{Q}$. Sono i numeri irrazionali. Un numero irrazionale è quindi un numero reale che non può essere scritto come una frazione $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, con $n \neq 0$. Alcuni numeri irrazionali sono numeri irrazionali algebrici come la radice quadrata di due e gli irrazionali algebrici sono radici di equazioni algebriche a coefficienti interi (esempio la la radice quadrata di due è soluzione di $x^2 - 2 = 0$), altri sono numeri irrazionali trascendenti come e, π e gli irrazionali trascendenti non sono radici di equazioni algebriche a coefficienti interi. I numeri trascendenti furono per la prima volta distinti dagli irrazionali algebrici da Kronecker.

Lemma

Se m^2 è pari, allora m è pari

Proof.

Se m fosse dispari $m = 2k + 1$, allora $m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 3k + 1$ risulterebbe dispari contro l'ipotesi.

Il numero $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Proof.

Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale. Allora esistono due interi m e n privi di fattori comuni eccetto l'unità, tali che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Elevando al quadrato si ha

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \Longleftrightarrow \quad m^2 = 2n^2$$

Questo implica che m^2 è pari, e che quindi m è pari, ossia esiste k intero tale che $m = 2k$. Sostituendo a $m^2 = 2n^2$ abbiamo che anche n è pari, e quindi m e n hanno in comune un fattore 2, impossibile perchè abbiamo assunto m e n privi di fattori comuni. Abbiamo ottenuto una contraddizione con l'ipotesi. $\square$

I numeri reali possono essere pensati come punti su una retta. I numeri corrispondenti agli interi sono ugualmente spaziati. La distanza tra due interi consecutivi è pari a 1. La distanza tra due numeri naturali pari consecutivi è pari a 2. La distanza tra due reali consecutivi $x_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ come si comporta asintoticamente per n grande?

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

(diventa sempre più piccolo).

La distanza tra due naturali consecutivi $x_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ come si comporta asintoticamente per n grande?

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

(diventa sempre più grande)

La distanza tra due reali consecutivi $x_n = \sqrt{n^2 + 1}$, $n \in \mathbb{N}$ come si comporta asintoticamente per n grande?

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{(n+1)^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{2n}{\sqrt{(n+1)^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}}$$

Osserviamo

$$\sqrt{(n+1)^2 + 1} = \sqrt{n^2(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})} = n\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

$$\sqrt{n^2 + 1} = \sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$\sqrt{(n+1)^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1} = n\left[\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right] \approx 2n$$

In definitiva

$$\sqrt{(n+1)^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} \approx 1$$

Riflettiamo sulla dimostrazione

$$x \in \mathbb{Q}, \iff \exists m, n \in \mathbb{Z} \, x = \frac{m}{n}, \, n \neq 0$$

Cosa vuol dire negare $x \in \mathbb{Q}$?

$$x \notin \mathbb{Q}, \iff \forall m, n \in \mathbb{Z} \, x \neq \frac{m}{n}, \, n \neq 0$$

Minimo e massimo tra due numeri reali

Ricordiamo che l'operazione $\min\{a, b\}$ definisce il più piccolo numero tra a e b , ossia

$$\min\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{se } a \leq b \\ b, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'operazione $\max\{a, b\}$ definisce il più grande numero tra a e b , mentre

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq b \\ b, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Un intorno di un punto x_0 si scrive

$$I(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : -x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\},$$

$\delta > 0$ rappresenta la semiampiezza dell'intorno.

Definition

Un punto x_0 è punto di accumulazione per l'insieme X se in un qualsiasi intorno del punto x_0 cade almeno un punto appartenente all'insieme I diverso da x_0 .

Mostrare che $x = 0$ è un punto di accumulazione per

$$X = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

In generale tratteremo insiemi semplici di $\mathbb{R}$ come semplici unione e semplici intersezioni di intervalli.

Il simbolo di somma e prodotto

La sommatoria è un simbolo matematico che indica la somma di un certo insieme di numeri. Si usa la lettera $\sum$. Si deve indicare l'intervallo di valori dove la somma ha luogo ossia il valore inferiore e superiore dell'indice della somma; alla destra del simbolo $\sum$ vi è un' espressione algebrica che in generale dipende dall'indice di sommatoria. Sia $k_0 \leq k \leq k_1$ allora

$$a_{k_0} + \cdots + a_{k_1} = \sum_{k=k_0}^{k_1} a_k.$$

Fissiamo $k_0 = 1, k_1 = N$. Si ha

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_N = \sum_{k=1}^N a_k$$

Valgono le seguenti regole



$$\sum_{k=1}^N a_k = \sum_{j=1}^N a_j$$



$$\sum_{k=1}^N a_k + \sum_{k=1}^N b_k = \sum_{k=1}^N (a_k + b_k)$$

$$\sum_{k=1}^N c a_k = c \sum_{k=1}^N a_k, \quad c \in \mathbb{R}$$

► Per $1 \leq J \leq N$

$$\sum_{k=1}^J a_k + \sum_{k=J+1}^N a_k = \sum_{k=1}^N a_k$$

► Per $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^N a_k = \sum_{K=p+1}^{N+p} a_{K-p}$$



Vero o falso

$$\sum_{k=1}^N a_{k-1} = \sum_{k=2}^{N+1} a_k$$

Vero o falso

$$\sum_{k=1}^N a_{k-1} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k$$

Vero o falso

$$\sum_{k=1}^N a_{k+1} = \sum_{k=1}^N a_k$$

La produttoria è un simbolo matematico che indica il prodotto di un certo insieme di numeri. Si usa la lettera $\prod$. Si deve indicare l'intervallo di valori dove la produttoria ha luogo ossia il valore inferiore e superiore dell'indice della produttoria; alla destra del simbolo $\prod$ vi è un'espressione algebrica che in generale dipende dall'indice di produttoria

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_N = \prod_{k=1}^N a_k$$

Minimo e massimo di un insieme di numeri reali

Dato un insieme X di numeri reali un numero reale m è un minorante per X se

$$\forall x \in X \quad x \geq m.$$

Se l'insieme X ha un minorante, X si dice inferiormente limitato.

Dato un insieme X di numeri reali un numero reale M è un maggiorante per X se

$$\forall x \in X \quad x \leq M.$$

Se l'insieme X ha un maggiorante, X si dice superiormente limitato.

Un insieme inferiormente e superiormente limitato si dice limitato.

Example

► L'insieme

$$X = \{x = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

è inferiormente e superiormente limitato. L'insieme dei minoranti è dato da

L'insieme

$$X = \{x = (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$$

ha come insieme dei minoranti

$$X_m = \{x \in \mathbb{R}, x \leq -1\},$$

il cui massimo è -1 (minimo dell'insieme X), mentre l'insieme dei maggioranti è dato da

$$X_M = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 1\},$$

il cui minimo è 1 (massimo dell'insieme X).

Se esistono, il minimo e il massimo o appartengono all'insieme: puo' accadere che l'insieme non ammetta massimo o minimo. Ad esempio

$$X = \{x = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}\},$$

non ammette minimo. L'insieme dei minoranti

$$X_m = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \leq 0\},$$

ammette però massimo. Il numero 0 non è il minimo di X . È l'estremo inferiore dell'insieme X . Analogamente

$$X = \{x = -\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}\},$$

non ammette massimo. L'insieme dei maggioranti

$$X_M = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0\},$$

ammette però minimo. Il numero 0 non è il massimo di X . È l'estremo superiore dell'insieme X .

M è l'estremo superiore dell'insieme X ossia M è il minimo dei maggioranti dell'insieme X .

Non esiste $c \in \mathbb{Q}$ elemento separatore degli insiemi

$$Y = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0, q^2 > 2\}$$

$$X = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\} \cup \{q \geq 0, q^2 \leq 2\}.$$

Dim. Dovrà risultare

$$x \leq c \leq y, \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Se $c \in X$, sia $c > 0$ allora $c^2 \neq 2$ (per quanto precedentemente dimostrato), e dovrà risultare $c^2 < 2$.

Si ha per $N \in \mathbb{N}$ e

$$N > \frac{2c+1}{2-c^2},$$

allora

$$c + \frac{1}{N} \in X.$$

Infatti $c + \frac{1}{N} \in \mathbb{Q}$ e

$$\left(c + \frac{1}{N}\right)^2 = c^2 + \frac{1}{N^2} + \frac{2c}{N} < 2.$$

Abbiamo trovato un elemento di X maggiore di c , contro l'ipotesi

$$x \leq c, \forall x \in X$$

Assioma di completezza

Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con $a \leq b$
 $\forall a \in A, \forall b \in B$. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$
 $\forall a \in A, \forall b \in B$

Theorem

Ogni insieme X di numeri reali che non sia vuoto e che sia limitato superiormente possiede un estremo superiore.

Proof.

Indichiamo con Y l'insieme dei maggioranti di X . $Y \neq \emptyset$.

Applichiamo l'assioma di completezza. Esiste M reale tale che

$$x \leq M \leq y, \forall x \in X, \forall y \in Y$$

M è un maggiorante di X ossia $M \in Y$, ed è minore di tutti gli elementi di Y . Quindi M è il minimo dei maggioranti. □

Analogamente

Theorem

Ogni insieme X di numeri reali che sia non vuoto e inferiormente limitato possiede un estremo inferiore.

Per ogni insieme numerico X non limitato superiormente si pone

$$\sup X = +\infty$$

Tali insiemi sono caratterizzati dalla proprietà seguente

$$\forall M \in \mathbf{R}, \quad \exists x_1 \in X \text{ t.c. } x_1 > M.$$

In modo analogo, se X non è limitato inferiormente allora non ha minoranti. Cioè, comunque si consideri un numero reale m , esiste un elemento in X minore di m .

Per ogni insieme numerico X non limitato inferiormente si pone

$$\inf X = -\infty$$

Tali insiemi sono caratterizzati dalla proprietà

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists x_2 \in X \text{ t.c. } x_2 < m.$$

Esercizi

Dimostrare

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad -(a + b) = (-a) + (-b)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \cdot b = 0 \text{ e } a \neq 0 \implies b = 0$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ oppure } b = 0$$

Vero o falso

$$\boxed{\text{V}} \quad \boxed{\text{F}} \quad \sqrt{a^2} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{V}} \quad \boxed{\text{F}} \quad -1 \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\text{V}} \quad \boxed{\text{F}} \quad \pi \in \mathbb{Q}$$

$$\boxed{\text{V}} \quad \boxed{\text{F}} \quad [0, 5] \subset [1, 6]$$

Quale è vera?

☐ a $\sqrt{a} = a$ non ammette soluzione in $\mathbb{R}$

☐ b $a^2 = b^2 \iff a = b$

☐ c $0, \overline{3} \in \mathbb{Q}$

☐ d un numero naturale $\in \mathbb{Q}$

Quale è vera?

- ☐ a $\max\{a, b\} > \min\{a, b\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- ☐ b $\max\{a, b\} \geq \min\{a, b\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- ☐ c un numero reale al quadrato è sempre > 0 .

Il modulo di x

Dato $x \in \mathbb{R}$ il modulo di x è definito

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

Vale per $x, y \in \mathbb{R}$

- ▶ $|x| \geq 0$
- ▶ $x \neq 0$ se e solo se $|x| > 0$
- ▶ $|x| = |-x|$
- ▶ $-|x| \leq x \leq |x|$
- ▶ $|x| \leq r$ se e solo se $-r \leq x \leq r$ r reale positivo.
- ▶ $|x| < r$ se e solo se $-r < x < r$, r reale positivo.

- ▶ $|xy| = |x||y|$
- ▶ $|x + y| \leq |x| + |y|$
- ▶ $||x| - |y|| \leq |x - y|$
- ▶ $|x| = |y|$ se e solo se $x^2 = y^2$,
 $|x| < |y|$ se e solo se $x^2 < y^2$.

Dati N numeri reali a_k , $k \in \mathbb{N}$, dimostrare

$$\left| \sum_{k=1}^N a_k \right| \leq \sum_{k=1}^N |a_k|$$

Il principio di Induzione

In *Arithmetices principia* Peano introduce i numeri naturali $\mathbb{N}$ dando le seguenti regole

- ▶ 1 è un numero $\in \mathbb{N}$,
- ▶ Il successivo di un numero $\in \mathbb{N}$ è un numero $\in \mathbb{N}$,
- ▶ 1 non è successivo di nessun numero $\in \mathbb{N}$,
- ▶ se i successivi di due numeri $\in \mathbb{N}$ sono uguali, anche i due numeri sono uguali,
- ▶ Se un insieme A contiene il numero 1 e il successivo di ogni suo elemento, allora $A = \mathbb{N}$,

Gli assiomi riguardano l'operazione del passaggio da un numero naturale al suo successivo, l'ultimo dei quali particolarmente importante nel definire le operazioni in $\mathbb{N}$. Esso è il principio di induzione. Data una proposizione $\mathcal{P}(n)$, con $\mathcal{P}(1)$ vera se **dall'assumere $\mathcal{P}(n)$ vera** (ipotesi induttiva), risulterà $\mathcal{P}(n+1)$ vera, allora la proposizione sarà vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dimostrare per esercizio

La disuguaglianza di Bernoulli e altri casi

Spesso alla base di dimostrazioni di teoremi, la disuguaglianza di Bernoulli asserisce che

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1.$$

Proof.

La disuguaglianza è verificata per $n = 1$. **Assumendo vera la disuguaglianza al passo n** si ha

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \geq 1+(n+1)x.$$



Dimostrare al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$|x^n| = |x|^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Disuguglianze

Introduciamo il simbolo ! (fattoriale di n): è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ che agisce cos`ì

$$1! = 1, \quad n! = n(n-1)!$$

Esempio :

$$5! = 5(4!) = 5 \cdot 4(3!) = 5 \cdot 4 \cdot 3(2!) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2(1!) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Dimostriamo tramite il principio di induzione

$$n! \geq 2^{n-1}, \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Proof.

Per $n = 1$ è verificata. **Assumendo vera la disuguaglianza al passo n** , si ha

$$(n+1)! = n!(n+1) \geq 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$$

Dimostriamo tramite il principio di induzione

$$2^n > n, \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Proof.

Per $n = 1$ è verificata. **Assumendo vera la disuguaglianza al passo n** , si ha

$$2^{n+1} = 2^n 2 > 2n \geq n + 1.$$



Sia $a \geq 1$. Dimostrare che

$$\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proof.

Prendendo $x = \frac{a-1}{n}$, applichiamo la disuguaglianza di Bernoulli

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq a,$$

passando alla radice n -esima si ha il risultato.



Un altro caso

Se il prodotto di n numeri reali e positivi è uguale ad 1, la loro somma risulta $\geq$ di n . Dim. Il risultato è vero per $n = 1$. Supponiamo che $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ e dimostriamo che se

$$x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} = 1,$$

allora

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1.$$

Se

$$x_1 x_2 + \cdots + x_n x_{n+1} = 1,$$

allora

- ▶ tutti i fattori sono uguali. Quindi sono tutti uguali ad 1 e la loro somma vale $n + 1$, e il risultato è dimostrato.
Se non,
- ▶ Esisterà almeno un fattore più piccolo di 1 ed un fattore più grande di 1.

Supponiamo

$$x_1 < 1, \quad x_{n+1} > 1.$$

Poniamo

$$y_1 = x_1 x_{n+1},$$

abbiamo

$$y_1 x_2 \cdots x_n = 1,$$

possiamo dunque applicare il risultato assunto vero al passo n , ne segue

$$y_1 + x_2 \cdots + x_n \geq n,$$

ma

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 \cdots x_n + x_{n+1} &= (y_1 + x_2 \cdots x_n) + x_{n+1} - y_1 + x_1 \geq \\n + 1 + x_{n+1} - y_1 + x_1 - 1 &= n + 1 + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 - 1 = \\n + 1 + (x_{n+1} - 1)(1 - x_1)\end{aligned}$$

Poichè

$$(x_{n+1} - 1)(1 - x_1) \geq 0,$$

il risultato è dimostrato al passo $n + 1$.

Theorem

Siano dati $x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_n$, non negativi, $n \in \mathbb{N}$. La media geometrica M_g è il numero

$$M_g := (x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

La media aritmetica M_a è il numero

$$M_a := \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

Si ha

$$M_a \geq M_g.$$

Proof.

Consideriamo $\frac{x_1}{M_g}, \dots, \frac{x_2}{M_g}, \frac{x_n}{M_g}$, allora la radice ennesima del prodotto vale 1 ossia $\frac{x_1}{M_g} \frac{x_2}{M_g} \cdots \frac{x_n}{M_g} = 1$, e per il risultato precedente $\frac{x_1}{M_g} + \frac{x_2}{M_g} + \frac{x_n}{M_g} \geq n$, ossia $M_a \geq M_g$. □

Diamo un'altra dimostrazione per induzione che fa uso della disuguaglianza di Bernoulli

- Per $n = 1$ la disuguaglianza è vera risultando

$$x_1 = x_1$$

- Supponiamo che al passo $n - 1$ risulti

$$M'_g = \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1} = M'_a$$

Si ha

$$M_a = \frac{(n-1)}{n} M'_a + \frac{x_n}{n} = \left(M'_a + \frac{(x_n - M'_a)}{n} \right),$$

$$\frac{M_a}{M'_a} = \left(1 + \frac{x_n - M'_a}{M'_a} \frac{1}{n}\right), \quad \left(\frac{M_a}{M'_a}\right)^n = \left(1 + \frac{x_n - M'_a}{M'_a} \frac{1}{n}\right)^n$$

Per applicare la disuguaglianza di Bernoulli dovrà risultare
 $-M'_a + x_n \geq -nM'_a$ ossia $(n-1)M'_a + x_n \geq 0$, che risulta verificata.



$$\left(\frac{M_a}{M'_a}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x_n - M'_a}{M'_a}\right) = \frac{x_n}{M'_a}$$
$$(M_a)^n \geq x_n (M'_a)^{n-1},$$

e quindi per l'ipotesi induttiva

$$(M_a)^n \geq x_n (M'_g)^{n-1} = x_1 \cdot x_2 \dots x_n = \prod_{i=1}^n x_i = (M_g)^n.$$

e la dimostrazione è completa

Disuguaglianza di Young per esponenti razionali

Come applicazione della disuguaglianza tra la media aritmetica e geometrica dimostriamo la disuguaglianza di Young per esponenti razionali.

Definition

Dato $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$ diciamo coniugato di p il numero reale q tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Se $p = \frac{n}{m}$, $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ il coniugato di p è dato da

$$q = \frac{n}{n - m}.$$

Theorem

Disuguaglianza di Young (esponenti razionali): dati due numeri reali positivi x e y , e dati p, q numeri razionali verificanti

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si ha

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Proof.

Dalla disuguaglianza sulle medie

$$(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Fissiamo

$$x_1 = x_2 = \dots x_m = x^p \quad x_{m+1} = \dots x_n = b^q$$

Fissiamo $p = \frac{n}{m}$ con $m < n$, segue che il coniugato di p è dato da $q = \frac{n}{n-m}$. allora

$$((x^p)^m (y^q)^{n-m})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{mx^p + (n-m)y^q}{n}$$

$$((x^p)^{\frac{m}{n}} (y^q)^{\frac{n-m}{n}})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{m}{n} x^p + \frac{n-m}{n} y^q,$$

segue allora la disuguaglianza.



Formula del binomio

Definiamo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dimostrare per esercizio, per $1 \leq k \leq n$, ($0! = 1$, per convenzione.)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Applicare la formula precedente per costruire il triangolo di Tartaglia Dimostrare per induzione

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

per ogni coppia di numeri reali a e b .

Dim. L'asserto è vero per $n = 1$. Assumendo vera la formula al passo n la dimostriamo al passo $n + 1$. Vogliamo dimostrare che

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)^n(a + b) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) (a + b) =$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} =$$

$$\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + a^{n+1} + b^{n+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Esercizi

Dimostrare

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

$$(\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{2} - 1)^k,$$

Dimostrare tramite il principio di induzione

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Successioni limitate.

Definition

Una successione di numeri reali è un'applicazione dall'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali in $\mathbb{R}$:

$$n \in \mathbb{N} \longrightarrow x_n \in \mathbb{R}.$$

L'elemento $x_n \in \mathbb{R}$ è quindi l'immagine del numero $n \in \mathbb{N}$.

Una successione di numeri reali si dice inferiormente limitata se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $x_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$. Una successione di numeri reali si dice superiormente limitata se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Una successione si dice limitata se risulta inferiormente e superiormente limitata.

Una successione si dice
monotona crescente

$$x_{n+1} \geq x_n,$$

Esempio: 2^n .
monotona decrescente

$$x_{n+1} \leq x_n,$$

Esempio: $(\frac{1}{2})^n$.

Osserviamo che una successione può non essere monotona ma essere oscillante (esempio $(-1)^n$)

Dimostriamo che la successione

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

è monotona crescente.

Applicando la disuguaglianza

$$\sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1}$$

con

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{and} \quad a_{n+1} = 1,$$

otteniamo

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Ciò è equivalente a $x_n \leq x_{n+1}$. Quindi (x_n) è crescente ed è inferiormente limitata da $x_1 = 2$.

==

In più applicando la disuguaglianza

$$\sqrt[n+2]{a_1 \cdots a_{n+2}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n+2}}{n+2}$$

con

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{and} \quad a_{n+1} = a_{n+2} = \frac{1}{2}$$

otteniamo

$$\sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{n+2}{n+2} = 1.$$

Equivalente a $x_n \leq 4$. Quindi (x_n) è limitata superiormente da 4.

$$e = \sup_n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$$

Il numero e è la base dei logaritmi naturali

$$e \approx 2.7182818284590452353602874713527.....$$

Esercizio. Dimostrare $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è limitata

Proof.

$$0 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < 8$$



La successione

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

è decrescente.

Proof.

Abbiamo Per $n > 1$ consideriamo il quoziente

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} =$$

$$\frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+2} \geq \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\iff$$

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+2} \geq \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Applicazione della disuguaglianza di Bernoulli.

Successioni divergenti positivamente e negativamente

Definition

Una successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ si dice *divergente positivamente*, se per ogni numero reale $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > \nu \implies x_n > M.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

Definition

Una successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ si dice *divergente negativamente*, se per ogni numero reale $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > \nu \implies x_n < -M.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Esempio di successione divergente positivamente : $x_n = 2^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$$

Esempio di successione divergente negativamente : $x_n = \ln \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{n} = -\infty$$

Definition

Si dice che la successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ *converge* al numero reale l , se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $n > \nu \implies |x_n - l| < \varepsilon$. In simboli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l,$$

che si legge *limite di x_n rispetto a n uguale ad l* .

Poichè $|x_n - l| < \varepsilon$ equivale a

$$-\varepsilon < x_n - l < \varepsilon,$$

cioè

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon,$$

si può anche scrivere

$$n > \nu \implies l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon.$$

Esempio di successione convergente : $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

La funzione parte intera, nota anche come funzione floor (dalla parola inglese floor che significa pavimento), è la funzione che associa ad ogni numero reale x il più grande intero minore o uguale a x .

La parte intera superiore, nota anche come funzione ceil (dalla parola inglese ceiling che significa soffitto), definita nel modo seguente: per ogni numero reale x $\text{ceil}(x)$ è il più piccolo intero non minore di x . Esempio, $\text{ceil}(2.7) = 3$, $\text{ceil}(2) = 2$

UNICITA' DEL LIMITE Una successione convergente non può avere limiti distinti Dimostrare.

Una successione convergente é limitata. Dimostrare.

Teorema

Se $(x'_n)_\mathbb{N}$ e $(x''_n)_\mathbb{N}$ sono successioni regolari (cioè successioni che ammettono limite $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), si ha

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 x'_n + c_2 x''_n) = c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n,$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n \cdot x''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n,$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n}{x''_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n},$

in tutti i casi in cui il secondo membro ha significato in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Forme Indeterminate

Se $x'_n \rightarrow -\infty$ e $x''_n \rightarrow +\infty$, allora $x'_n + x''_n$ non può essere inquadrata in nessuno dei casi già considerati.

Questo rientra infatti tra quelli in cui il secondo membro $-\infty + (+\infty)$ non ha significato in $\tilde{\mathbb{R}}$.

Facciamo vedere, per mezzo di esempi, come la successione $x'_n + x''_n$ può essere di qualunque tipo.

$$x'_n = -n, x''_n = n \quad x'_n + x''_n = 0, \text{ convergente};$$

$$x'_n = -n, x''_n = n + (-1)^n \quad x'_n + x''_n = (-1)^n, \text{ non regolare};$$

$$x'_n = -n, x''_n = n^2 \quad x'_n + x''_n = (n-1)n, \rightarrow +\infty;$$

$$x'_n = -n^3, x''_n = n^2 \quad x'_n + x''_n = n^2(1-n), \rightarrow -\infty.$$

Per questo motivo quando

$$\begin{cases} x'_n \rightarrow -\infty \\ x''_n \rightarrow +\infty \end{cases}$$

si dice che la successione

$$x'_n + x''_n$$

si presenta sotto la forma indeterminata $\boxed{\infty - \infty}$.

Analoghe considerazioni valgono per $x'_n - x''_n$ se $x'_n \rightarrow +\infty$ e $x''_n \rightarrow +\infty$ o anche se $x'_n \rightarrow -\infty$ e $x''_n \rightarrow -\infty$.

► Se

$$\begin{cases} x'_n \rightarrow 0 \\ x''_n \rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

la successione

$$x'_n \cdot x''_n,$$

si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

► Se invece

$$\begin{cases} x'_n \rightarrow \pm\infty \\ x''_n \rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

si dice che la successione

$$\frac{x'_n}{x''_n},$$

si presenta nella forma indeterminata

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}.$$

► Quando, infine

$$\begin{cases} x'_n \rightarrow 0 \\ x''_n \rightarrow 0 \end{cases}$$

si dice che la successione

$$\frac{x'_n}{x''_n},$$

si presenta nella forma indeterminata $\boxed{\frac{0}{0}}$.

Il teorema del confronto

Theorem

Siano x_n , y_n , e z_n tre successioni.

- ▶ *Se $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$, $z_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$, e $x_n \leq y_n \leq z_n$, allora $y_n \rightarrow x$*
- ▶ *Se $y_n \rightarrow +\infty$ e $x_n \geq y_n$, allora $x_n \rightarrow +\infty$.*
- ▶ *Se $y_n \rightarrow -\infty$ e $x_n \leq y_n$, allora $x_n \rightarrow -\infty$.*

Esempio.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Dall'identità

$$\left[\left((n)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) + 1 \right]^n = n$$

Dalla formula del binomio,

$$\left[\left((n)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) + 1 \right]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left((n)^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^k,$$

considerando nella somma unicamente l'addendo ottenuto per $k = 2$, otteniamo

$$\frac{n(n-1)}{2} \left((n)^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^2 < n,$$

quindi

$$0 \leq (n)^{\frac{1}{n}} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad 1 \leq (n)^{\frac{1}{n}} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

Concludiamo passando al limite.

Calcolo di limiti

Sia x_n una successione a termini positivi. Posto

$$y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

si ha: se $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n < 1$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Applicazione. $x > 1, c > 0, n \in \mathbb{N}$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^c}{x^n} = 0$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Successione non regolare

Definizione. Una successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ si dice *non regolare* o *oscillante* se non ammette limite.

Esempio di successione non regolare: $x_n = (-1)^n$ non esiste il $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$

Dato l'applicazione $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. $i(k) = j$ con $i(k+1) > i(k)$, una successione estratta è la successione ristretta a $i(k)$. Se x_n converge a $x \in \mathbb{R}$ (oppure diverge positivamente o negativamente) allora ogni estratta di x_n converge a x (oppure diverge positivamente o negativamente).

Example

Non esiste il $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ perchè calcolata nell'estratta di indici pari la sottosuccessione converge a 1, nell'estratta di indici dispari la sottosuccessione converge a -1 .

Permanenza del segno per successioni

Sia $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ con $l > 0$ allora esiste ν tale che $x_n > 0$ per $n > \nu$.

Sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l \qquad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = l'$$

- ▶ Se $x_n < 0$ per ogni n allora $l \leq 0$. Ricordare l'esempio $x_n = -\frac{1}{n}$
 $x_n < 0$ per ogni n ma $l = 0$
- ▶ Se $x_n \leq 0$ per ogni n allora $l \leq 0$.
- ▶ Se $x_n \leq y_n$ per ogni n allora $l \leq l'$

Dimostrare che se per x, y reali risulta $x < y + \frac{1}{\sqrt{n}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $x \leq y$.

Il teorema fondamentale sulle successioni monotone

Theorem

Se x_n è crescente e superiormente limitata allora

$$\sup_n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Se x_n è decrescente e inferiormente limitata allora

$$\inf_n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Se x_n è crescente e superiormente non limitata allora

$$\sup_n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

Se x_n è decrescente e inferiormente non limitata allora

$$\inf_n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

Supponiamo, per fissare le idee, che $(x_n)_{\mathbb{N}}$ sia crescente. Se non è limitata, non lo è superiormente. Infatti x_1 è un minorante. Comunque si scelga un numero $M \in \mathbb{R}$ esiste un elemento della successione, x_ν , tale che $x_\nu > M$. Per ogni $n > \nu$ si avrà $x_n \geq x_\nu > M$ e questo significa $x_n \rightarrow +\infty$.

Se $(x_n)_{\mathbb{N}}$ è limitata, avrà estremo superiore $e_M \in \mathbb{R}$. Per le proprietà dell'estremo superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un termine della successione, sia x_ν , tale che $x_\nu > e_M - \varepsilon$. Per $n > \nu$ si avrà $x_n \geq x_\nu$ e $x_n \leq e_M$. Perciò da $n > \nu$ segue

$$e_M - \varepsilon < x_\nu \leq x_n < e_M + \varepsilon.$$

Ciò significa $x_n \rightarrow e_M$.

In modo analogo si prova l'altro caso.

Come esercizio sul teorema fondamentale sulle successioni monotone provare il teorema nel caso di successioni decrescenti e limitate. (suggerimento $l' = \inf_n x_n$. Per definizione di estremo inferiore $x_n \geq l'$, per ogni n ; inoltre $\forall \epsilon > 0$ esiste ν tale che $x_\nu - \epsilon < l'$. Ma $x_\nu \leq x_n$ se $n > \nu$).

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1$$

Da cui, passando al limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

Tenuto conto dell'esercizio precedente calcoliamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

Abbiamo che non esiste il limite della successione

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^n & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

r.

Il termine generale della successione si può anche scrivere

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n & \text{se } n \text{ è pari} \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Successioni di Cauchy

$x_1, x_2, x_3, \dots$ di numeri reale si dice di Cauchy se per ogni numero reale e positivo ε , esiste un intero positivo N tale che per tutti gli interi positivi m e n con $m, n > N$, risulta

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

Ricordiamo: non è sufficiente che ogni termine sia arbitrariamente vicino al termine precedente per avere una successione di Cauchy.

Prendiamo

$$a_n = \sqrt{n},$$

ogni termine è arbitrariamente vicino al termine precedente:

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Comunque con crescenti valori di m , i termini $a_m - a_n$ diventano arbitrariamente grandi. Per ogni indice n e per ogni numero reale $\gamma > 0$, esiste un indice m grande abbastanza tale che $a_m - a_n > \gamma$. (Prendi $m > (\sqrt{n} + \gamma)^2$.) La successione $a_n = \sqrt{n}$, non è una successione di Cauchy.

Ogni successione di Cauchy di $\mathbb{R}$ è convergente in $\mathbb{R}$

Completo: non ci sono "punti mancanti" nell'insieme. L'insieme dei numeri razionali con la metrica Euclidea non è completo: si può costruire una successione di Cauchy di numeri razionali che convergono a un numero $\notin \mathbb{Q}$.

Serie

$$x_1 + x_2 + \dots x_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots x_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

- Se la serie è convergente allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

- Teorema sulle serie a termini non negativi: una serie a termini non negativi non può essere indeterminata: è convergente oppure divergente positivamente.

Non è semplice calcolare la somma di una serie. Si studia il carattere della serie cercando di stabilire se la serie converge oppure no

Serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ridotta n -sima

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

Se $x = 1$ si ha

$$s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Sia $x \neq 1$. Si ha

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Se $|x| < 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ e pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Ricordiamo: teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima

Se $x > 1$, poichè $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x^n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

Sia ora $x = -1$,

$$s_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2p \\ 1, & n = 2p + 1 \end{cases}$$

Pertanto la successione $(s_n)_{\mathbb{N}}$ non è regolare.

Sia infine $x < -1$. Possiamo scrivere $x = -|x|$, e quindi

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1 - (-|x|)^n}{1 + |x|} = \frac{1 - (-1)^n |x|^n}{1 + |x|} \\ &= \begin{cases} \frac{1 - |x|^{2p}}{1 + |x|}, & n = 2p \\ \frac{1 + |x|^{2p-1}}{1 + |x|}, & n = 2p - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ne segue che $s_{2p} \rightarrow -\infty$ e $s_{2p-1} \rightarrow +\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & x \in (-1, 1) \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

$$1,5 = 15/10 = 3/2$$

Funzione generatrice di un numero decimale periodico.

Calcoliamo la frazione generatrice di $1,\bar{5}$

$$1,\bar{5} = 1 + 5(10)^{-1} + 5(10)^{-2} + \dots + 5(10)^{-n} + \dots = 1 + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 1 + \frac{5}{9}$$

$$\frac{14}{9}$$

Calcoliamo ora la frazione generatrice di $1,8\bar{5}$

$$\begin{aligned} 1,8\bar{5} &= 1 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \dots + = \\ &= 1 + \frac{4}{5} + 5 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 1 + \frac{4}{5} + \frac{5}{90} = \frac{167}{90} \end{aligned}$$

Dimostrare che la frazione generatrice di $0.\overline{5}$ è uguale a $5/9$
Soluzione.

$$0,\overline{5} = 5(10)^{-1} + 5(10)^{-2} + \dots + 5(10)^{-n} + \dots =$$

$$0 + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{5}{9}$$

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

$$1 + s_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

Successione monotona crescente limitata

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

$$1 + s_n = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots n}\right) \leq$$

$$1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Dalla formula del binomio di Newton

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!}$$

Osserviamo per $k \geq 1$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n \dots n_{k\text{-volte}}}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n \dots n_{k\text{-volte}}} = 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\dots \leq 1.$$

Allora,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!},$$

la prima disuguaglianza segue passando al limite

Prendiamo $n + p$ con p intero positivo. Allora

$$1 + \sum_{k=1}^{n+p} \frac{(n+p)(n+p-1)(n+p-2)\dots(n+p-k+1)}{(n+p)^k} \frac{1}{k!}$$
$$\geq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(n+p)(n+p-1)(n+p-2)\dots(n+p-k+1)}{(n+p)^k} \frac{1}{k!}$$

Da cui passando al limite su p e osservando che

$$1 = \lim_p \frac{(n+p)(n+p-1)(n+p-2)\dots(n+p-k+1)}{(n+p)^k}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+p}\right)^{n+p} \rightarrow e \quad p \rightarrow +\infty$$

$$e \geq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

Allora passando al limite su n otteniamo l'altra disuguaglianza, e quindi l'uguaglianza.

Approssimazione di e .

$$e \approx 2,71828$$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Calcoliamo

$$\sum_{k=0}^{n+m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \frac{1}{(n+m)!} =$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \cdots \frac{1}{(n+2) \cdots (n+m)} \right) \leq$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} \right) < \frac{1}{nn!}$$

Allora per $m \rightarrow +\infty$, troviamo

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!},$$

disuguaglianza che consente il calcolo approssimato di e .

e non è un numero razionale

Proof.

Sappiamo $e > 2$. Ricordiamo

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!},$$

per $n = 1$ si ha $e < 3$; assumiamo per contraddizione che e sia un numero razionale $e = \frac{p}{q}$ con p, q interi positivi primi tra loro e $q > 1$. Allora

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < \frac{1}{qq!},$$

e

$$0 < q! \left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) < \frac{1}{q},$$

e otteniamo una contraddizione poichè il primo membro è un intero positivo e il secondo membro è un numero minore di uno. □

Serie armonica

Si chiama *serie armonica* la serie di termine generale $x_n = 1/n$.

Theorem

La serie armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

diverge positivamente.

Consideriamo per $k \in \mathbb{N}$

$$x_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

Allora $e \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ Poichè la funzione $\ln x$ è crescente in $(0, +\infty)$

$$1 = \ln e \geq k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Da cui

$$\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln k$$

Facendo le somme da 1 a n

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1)$$

In conclusione $s_n \geq \ln(n+1)$ e quindi la serie armonica diverge per il teorema di confronto sulle successioni.

Importante notare Per la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

è verificata la condizione $x_n \rightarrow 0$; questa condizione è perciò necessaria, ma non è sufficiente per la convergenza della serie.

Teorema (criterio del confronto asintotico)

Sia x_n una successione a termini non negativi per cui esiste il limite
e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = l \neq 0.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$$

Esempio Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è positivamente divergente

Serie armonica generalizzata

Per p numero reale e positivo. La serie armonica generalizzata è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} +\infty & p \leq 1 \\ < \infty & p > 1 \end{cases}$$

Dimostrazione del caso di convergenza

La successione delle ridotte n -sime è regolare, pertanto per valutarne il limite possiamo considerare una sottosuccessione.

$$s_{2^h-1} = 1 + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right] + \dots + \left[\frac{1}{(2^{h-1})^p} + \frac{1}{(2^{h-1}+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^h-1)^p} \right] <$$

$$1 + 2 \frac{1}{2^p} + 4 \frac{1}{4^p} + \dots + 2^{h-1} \frac{1}{(2^{h-1})^p} = \sum_{k=1}^h \left[\frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}} \right] <$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}} \right] < +\infty$$

teorema (criterio del confronto asintotico) Sia p un numero reale e positivo. Supponiamo $p \leq 1$. Sia x_n una successione a termini non negativi tale che per cui esiste il limite e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p x_n = l \neq 0.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$$

Esempio

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è positivamente divergente.

Teorema (criterio del confronto asintotico) Sia $p > 1$ un numero reale. Sia x_n una successione a termini non negativi tale che per cui esiste il limite in $\mathbb{R}$ di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p x_n$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$$

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente.

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente per $\alpha > \frac{1}{2}$ ($\iff 2\alpha > 1$) e divergente per $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Criterio del confronto

Consideriamo le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$$

con $0 \leq x_n \leq y_n \quad \forall n$. Si ha



$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ converge}$$



$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ diverge} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \text{ diverge}$$

Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1}.$$

La serie è convergente, infatti

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

.

Studiare la convergenza applicando il confronto asintotico.

Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!}.$$

r.Abbiamo

$$\frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!} \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Dunque la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!}$$

è positivamente divergente.

Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

r. La serie è divergente.

$$\sqrt{k^2 + 1} \leq \sqrt{k^2 + 1 + 2k} = k + 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty.$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \geq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty.$$

Studiare la convergenza applicando il confronto asintotico.

Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k.$$

r. La serie è positivamente divergente. Infatti

$$\frac{1}{k} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \geq \frac{2}{k}.$$

Il risultato segue allora dal confronto con la serie armonica.

Criterio del rapporto

Data una serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ tale che esista il limite

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = l, \text{ con } x_n \neq 0 \text{ per } n \text{ grande,}$$

si ha

- ▶ se $l > 1$ la serie diverge
- ▶ se $l < 1$ la serie converge
- ▶ non ne stabilisce il comportamento $l = 1$.

Criterio della radice

Data una serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ tale che esista il limite

$$\lim x_n^{1/n} = l,$$

- ▶ se $l > 1$ la serie diverge
- ▶ se $l < 1$ la serie converge
- ▶ non ne stabilisce il comportamento $l = 1$.

Esercizio Sia $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$. Allora

- ☐ a La serie converge
- ☐ c Nessuna delle precedenti

- ☐ b La serie diverge

Esercizio Sia $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x_n+1} \right)^n$ una serie tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ e $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Allora

☐ a La serie converge

☐ b La serie diverge

☐ c Nessuna delle precedenti

Dopo aver determinato dalla formula ricorsiva

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \frac{e}{n+1} \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

l'espressione di x_n , studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} x_n.$$

r. Si ha

$$x_n = \frac{e^n}{n!}.$$

Si può procedere alla dimostrazione utilizzando il principio di induzione. La formula è vera al primo passo e se supponiamo che sia vera per $n - 1$, ossia $x_{n-1} = \frac{e^{n-1}}{(n-1)!}$, si ha $x_n = x_{n-1} \frac{e}{n}$. Dal passo $n - 1$ si ricava

$$x_n = \frac{e^{n-1}}{(n-1)!} \frac{e}{n} = \frac{e^n}{n!},$$

da cui l'asserto.

Si tratta ora di studiare la convergenza della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$. È verificata la condizione necessaria per la convergenza $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n!} = 0$. La serie è a termini positivi. Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{e^n} = \frac{e}{n+1} \rightarrow 0$$

Criterio di Cauchy per le serie

Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$$

converga è che per ogni $\epsilon > 0$ esista un indice $\nu > 0$ tale che

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right| < \epsilon,$$

per ogni $n > \nu$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$.

Convergenza assoluta

Consideriamo le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$$

Si ha

►

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ converge}$$

►

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ converge} \not\implies \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \text{ converge}$$

Per avere due serie differenti nel carattere, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ dovrà contenere un numero infinito di cambi di segno. Una serie prototipo di questo tipo è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

è convergente.

Criterio di Leibniz

Vale il Criterio di Leibniz

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia x_n positivo, decrescente e infinitesimo. Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x_n$$

converge.

I numeri complessi. L'unità immaginaria: il numero i

Non tutte le equazioni $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ hanno una soluzione nell'insieme dei numeri reali. Estendiamo i numeri reali affinché equazioni polinomiali $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ abbiano almeno una soluzione nell'estensione di $\mathbb{R}$ che indichiamo con $\mathbb{C}$ (chiusura algebrica di $\mathbb{R}$). In particolare l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$. Definiamo l'unità immaginaria i soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$. La proprietà del numero i è data dalla relazione

$$i^2 = -1.$$

Forma algebrica dei numeri complessi

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ corrisponde ad una coppia ordinata di numeri reali (x, y) . Definiamo forma algebrica di un numero complesso z

$$z = x + iy.$$

x e y sono rispettivamente la parte reale e il coefficiente dell'unità immaginaria, e vengono scritti tramite la notazione

$$x = \Re z \quad y = \Im z$$

La forma algebrica si presta facilmente all'operazione di somma.

Dati due numeri complessi $z = x + iy$ e $w = u + iv$
l'operazione di somma $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si definisce al seguente modo

$$(z, w) \rightarrow z + w = (x + u) + i(y + v)$$

Esempio: $z = 1 + i$ $w = 1 + 3i$.

Ricordiamo che

$$z = 0 \iff (x, y) = (0, 0).$$

Nell'operazione di prodotto $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si opera algebricamente sapendo che $i^2 = -1$.

$$zw = (xu - yv) + i(yu + xv)$$

Esempio: $z = 1 + i$ $w = 1 + 3i$.

$$zw = (1 + i)(1 + 3i) = 1 + i + 3i + 3(i^2) = 1 - 3 + 4i = -2 + 4i$$

L'opposto $-z$ è dato da

$$-z = -x - iy$$

Abbiamo

$$z = 0 \iff (x, y) = (0, 0).$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \text{ modulo di } z$$

la distanza nel piano xy del punto (x, y) da 0.

Notiamo che

$$|z| = 0 \text{ se e solo se } z = 0$$

Valgono le proprietà

$$|zw| = |z||w|$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

diseguaglianza triangolare

Calcolare il modulo del numero complesso

$$z = 1 + i$$

Esercizio

. Determinare la forma algebrica del numero complesso $\frac{z+i}{z-i}$

$$\begin{aligned}\frac{z+i}{z-i} &= \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)} = \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)} \frac{(x-i(y-1))}{(x-i(y-1))} = \\ &= \frac{x^2 + (y^2 - 1) - ix(y-1) + ix(y+1)}{x^2 + (y-1)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} + i \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}\end{aligned}$$

I numeri complessi si possono identificare con i punti del piano reale ed è particolarmente importante la simmetria rispetto all'asse delle ascisse espressa dall'operazione di coniugio $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dato $z = x + iy$ il coniugato di z è il numero complesso

$$\bar{z} = x - iy.$$

L'operazione di coniugio è una funzione complessa di variabile complessa che vediamo. Studiamone le proprietà.

Dato z e $w \in \mathbb{C}$, $z + w$ è un numero complesso, a cui possiamo applicare l'operazione di coniugio. Il risultato non cambia se consideriamo z e ne facciamo il coniugato, consideriamo w e ne facciamo il coniugato, e poi sommiamo i due. In simboli


$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

Dato z e $w \in \mathbb{C}$ zw è un numero complesso, a cui possiamo applicare l'operazione di coniugio. Il risultato non cambia se consideriamo z e ne facciamo il coniugato, consideriamo w e ne facciamo il coniugato, e poi moltiplichiamo i due. In simboli



$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

Inoltre se operiamo due volte l'operazione di coniugio otteniamo il numero di partenza.



$$\overline{\overline{z}} = z$$

Ha interesse considerare il prodotto di z per il suo coniugato $\bar{z}$. Mentre il prodotto di z con se stesso produce un nuovo numero complesso z^2 il prodotto di z per il suo coniugato $\bar{z}$ fornisce un numero reale.

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad (1)$$

essendo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} \text{ modulo di } z.$$

Notiamo che $|z| = 0 \iff z = 0$. Per $z \neq 0$ si ha

$$z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \quad \text{per cui} \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

da cui si ottiene la formula del reciproco.

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Valgono le relazioni

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Si ha una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi e i punti del piano cartesiano (piano di Gauss). In tale corrispondenza: $x = \Re(z)$ rappresenta l'ascissa di (x, y) e $y = \Im(z)$ rappresenta l'ordinata di (x, y) .

- ▶ I numeri della forma $x + 0i$, (i numeri reali) corrispondono ai punti dell'asse delle ascisse che detto asse reale, evidenziando che si ha $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- ▶ I numeri della forma $0 + iy = iy$, (immaginari puri) corrispondono ai punti dell'asse delle ordinate detto asse immaginario.
- ▶ Disegnare l'opposto di z e il coniugato di z .

Argomento di z in $(-\pi, \pi]$.

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Discutere l'argomento dei numeri complessi immaginari puri.

Forma trigonometrica dei numeri complessi

La rappresentazione nel piano dei numeri complessi permette una rappresentazione mediante coordinate polari *forma trigonometrica* di z . La forma trigonometrica è particolarmente utile nelle operazioni di prodotto e radice.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi)$$

Dato $z = x + iy$ si ha

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

dove $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$ e $\theta = \arg z$.

L'argomento θ è individuato a meno di multipli interi di 2π . Si ha quindi un insieme $\theta + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$. Osserviamo che se $\rho = 0$ (cioè $z = 0$) $\arg z$ resta indeterminato. Partendo dalla condizione $z_1 - z_2 = 0$ si ha

$$z_1 = z_2 \iff \Re z_1 = \Re z_2 \quad \Im z_1 = \Im z_2,$$

conseguentemente

$$z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \quad \arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi$$

Prodotto

Prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad r = |z| \quad \theta = \arg z$$

$$w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \rho = |w| \quad \varphi = \arg w$$

$$\begin{aligned} zw &= r\rho[(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta)] \\ &= r\rho[\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)] \end{aligned}$$

naturalmente

$$zw = |zw|[\cos(\arg(zw)) + i \sin(\arg(zw))]$$

Per cui

$$|zw| = |z||w| \qquad \arg(zw) = \arg z + \arg w.$$

Esercizio

- . Utilizzando il principio di induzione dimostrare

$$z^n = |z|^n (\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z)), \quad n \in \mathbb{N}$$

Esercizio

Calcolare $(1 + i)^8$. Il numero complesso $1 + i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$|z^8| = |z|^8 = 16$$

-indent

$$\arg(z^8) = \frac{\pi}{4}8 + 2k\pi = 2\pi + 2k\pi$$

$$(1 + i)^8 = 16$$

Forma esponenziale di un numero complesso

Notiamo che la funzione $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ verifica $f(\theta)f(\varphi) = f(\theta + \varphi)$ Tale proprietà è tipica dell'esponenziale. Poniamo

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

e la scrittura

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Notiamo che $|e^{i\theta}| = 1$, infatti $|e^{i\theta}| = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Definizione di esponenziale in $\mathbb{C}$.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$|e^z| = e^x \quad \arg e^z = y + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Osserviamo che moltiplicare z per $e^{i\varphi}$ equivale a far effettuare a z una rotazione di φ .

Formula di triplicazione. Per $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos 3x + i \sin 3x &= (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \\ &= \cos^3 x - i \sin^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \sin^2 x \cos x.\end{aligned}$$

Uguagliando la parte reale e la parte immaginaria dei due numeri

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\sin(3x) = -\sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x$$

Radici n -sime di un numero complesso

$$z = w \iff \Re z = \Re w, \quad \Im z = \Im w$$

oppure

$$z = w \iff |z| = |w| \quad \arg z = \arg w + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Diciamo w radice n -sima di z se e solo se $w^n = z$.
Supponiamo $z \neq 0$, allora

$$w = |w|e^{i\varphi} \qquad z = |z|e^{i\theta}$$

$$w^n = |w|^n e^{in\varphi} = |z|e^{i\theta}$$

quindi

$$|w|^n = |z| \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad \text{ossia}$$

$$\begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}(2\pi) \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

al variare di k le radici n -sime *non* sono infinite; ma vi sono solo n radici distinte perchè poi i valori si ripetono.

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

Geometricamente: le radici n -esime di un numero complesso si dispongono, a partire dall'angolo $\frac{\theta}{n}$, sulla circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z|}$ e centro l'origine ai vertici di un poligono regolare di n lati inserito nella circonferenza. Dopo n passi si ritorna nella posizione di partenza.

Esercizio

In $\mathbb{C}$ per ogni intero positivo n esistono esattamente n radici n -esime dell'unità e sono nella forma

$$r_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = e^{2\pi i k/n}$$

con $0 \leq k \leq n-1$.

Esse si dispongono nel piano complesso lungo la circonferenza unitaria, ai vertici di un poligono regolare con n lati che ha un vertice in $(1, 0)$.

Calcolare le radici cubiche di $z = 1$.

Calcolare le radici quadrate di $z = i$ e $z = -i$.

Verificare che le radici quadrate di un numero complesso non nullo sono una opposta all'altra.

$$\varphi_k = \frac{\varphi}{2} + \frac{2k\pi}{2} \quad k = 0, 1$$

$$w_0 = \sqrt{\rho} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$w_1 = \sqrt{\rho} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right)$$

Esercizio

Calcoliamo le radici quarte di 4 :

$$4 = 4e^{i0} = 4e^{(0+2k\pi)i}$$

$$\varphi_k = \frac{2k\pi}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$w_0, w_1, w_2, w_3 \quad |w_k| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$$

$$\arg w_0 = 0, \quad \arg w_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg w_2 = \pi \quad \arg w_3 = \frac{3}{2}\pi$$

$$w_0 = \sqrt{2}, \quad w_1 = \sqrt{2}i \quad w_2 = -\sqrt{2} \quad w_3 = -\sqrt{2}i$$

Esempi di funzioni

Dati due insiemi di numeri reali X e Y , f è una relazione che a ogni $x \in X$ ($X = \text{Dom}(f)$ dominio di f) fa corrispondere un unico $y = f(x) \in Y$.

$$f : X \rightarrow Y,$$

$\text{Im}(f)$ l'insieme dei punti $y \in Y$, ottenuti come $y = f(x)$.

$$\text{Im}(f) = \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\}$$

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

La funzione si dice *suriettiva* se $\text{Im}(f) = Y$ e *iniettiva* se

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ si ha } x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

È importante associare alla funzione

- ▶ X l'insieme di definizione
- ▶ Il grafico
- ▶ $Im(f)$

- ▶ Traslazioni in x . $y = f(x + k)$, $k \in \mathbb{R}$, il grafico subisce una traslazione orizzontale, verso sinistra se $k > 0$, verso destra se $k < 0$.
- ▶ Traslazioni in y . $y = k + f(x)$, $k \in \mathbb{R}$, il grafico subisce una traslazione verticale, verso l'alto se $k > 0$, verso il basso se $k < 0$.

Funzione composta

$f : X \rightarrow Y$, $g : Z \rightarrow W$ e supponiamo $Y \subset Z$. Per ogni $x \in X$, si ha $f(x) \in Y \subset Z$,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = w \in W.$$

$g \circ f$ si dice funzione composta mediante f e g . L'operazione di composizione non è commutativa, ed è generalmente diverso $f \circ g$ da $g \circ f$.

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = x + 1$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2 + 2x$$

Funzione inversa

Sia $f : X \rightarrow Y$ iniettiva. Resta definita la funzione

$$f^{-1} : f(X) \rightarrow X$$

$$\forall y \in f(X), f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Le funzioni trigonometriche

Sia 2π la lunghezza della circonferenza di raggio 1. Al generico punto P appartenente alla circonferenza viene associato $(\cos x, \sin x)$, con le proprietà:

$$|\cos x| \leq 1, \quad |\sin x| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = -\sin(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \cos(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Dalla relazione $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, si osservi che le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ non si annullano mai contemporaneamente, pertanto non esistono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando per una costante reale positiva n l'argomento di una funzione trigonometrica, ossia considerando la funzione $f(nx)$, si determina una variazione del periodo da T a $\frac{T}{n}$.

La potenza di x . Per $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$ consideriamo

$$f(x) = x^n,$$

$$g(x) = n^x,$$

$$h(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

e distinguiamo il caso n pari e n dispari.

Per n pari, ad esempio $n = 2$

$$f(x) = x^2,$$

$$g(x) = x^{\frac{1}{2}},$$

$$h(x) = 2^x$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}, \quad \text{Dom}(h) = \mathbb{R},$$

$$\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \quad \text{Im}(g) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\},$$

$$\text{Im}(h) = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}.$$

Per n dispari, ad esempio $n = 3$

$$f(x) = x^3,$$

$$g(x) = x^{\frac{1}{3}},$$

$$h(x) = 3^x$$

$$\begin{array}{lll} \text{Dom}(f) = \mathbb{R}, & \text{Dom}(g) = \mathbb{R}, & \text{Dom}(h) = \mathbb{R} \\ \text{Im}(f) = \mathbb{R}, & \text{Im}(g) = \mathbb{R}, & \text{Im}(h) = \mathbb{R}_+ \end{array}$$

Al variare di $x \in \mathbb{R}$ consideriamo per $a > 1$

$$f(x) = a^x$$

Si dice logaritmo in base a di un numero x l'esponente da dare ad a per ottenere x .

$$x = a^y \iff y = \log_a x$$

(si legge: y il logaritmo in base a di x). Pensiamo al caso particolare

$$f(x) = 2^x$$

Logaritmi e proprietà dei logaritmi in base 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, , il logaritmo in base 2 ha la proprietà

$$2^{\log_2 x} = x.$$

Si ha

$$\log_2 1 = 0.$$

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$, vale

► $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$. Perchè

$$\log_2 xy = \log_2(2^{\log_2 x} 2^{\log_2 y}) = \log_2(2^{\log_2 x + \log_2 y}) = \log_2 x + \log_2 y$$

► $\log_2 \frac{1}{x} = -\log_2 x$. Perchè

$$0 = \log_2 1 = \log_2(xx^{-1}) = \log_2 x + \log_2 x^{-1},$$

$$-\log_2 x = \log_2 x^{-1}$$

► $\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 x - \log_2 y$.

$$\log_2 \frac{x}{y} = \log_2\left(x \frac{1}{y}\right) = \log_2 x + \log_2 \frac{1}{y} = \log_2 x - \log_2 y$$

- Per $n \in \mathbb{N}$, $\log_2 x^n = n \log_2 x$. Perchè

$$\log_2 x^n = \log_2 \underbrace{x \cdot x \dots x}_{n \text{ volte}} = \log_2 x + \log_2 x + \dots \log_2 x = n \log_2 x$$

- Per ogni $x \neq 0$, $\log_2 x^2 = 2 \log |x|$ Perchè se $x > 0$

$$\log_2 x^2 = \log_2 xx = \log_2 x + \log_2 x = 2 \log_2 x,$$

se $x < 0$ allora $-x > 0$

$$\log_2 x^2 = \log_2 (-x)(-x) = \log_2 (-x) + \log_2 (-x) = 2 \log_2 (-x),$$

ossia $x \neq 0$, $\log_2 x^2 = 2 \log |x|$

- per ogni x, y con $xy > 0$,
 $\log xy = \log |x| + \log |y|$. Perchè se $x > 0$ $y > 0$ allora

$$\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y,$$

se $x < 0$ $y < 0$ allora

$$\log_2 xy = \log_2 (-x)(-y) = \log_2 (-x) + \log_2 (-y)$$

La funzione $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ non è invertibile in $\mathbb{R}$. Possiamo renderla invertibile se limitiamo il suo dominio all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, in cui la funzione è monotona. La sua inversa è la funzione $f(x) = \arcsin(x)$.

La sua inversa $f(x) = \arcsin(x)$ è definita in $[-1, 1]$ a valori in $[-\pi/2, \pi/2]$

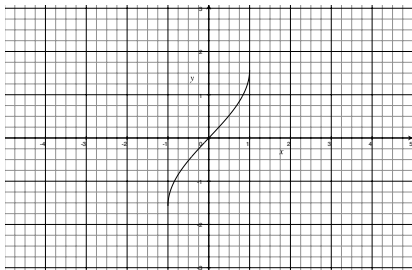


Grafico di $f(x) = \arcsin x$

La funzione $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ non è invertibile in $\mathbb{R}$. Possiamo renderla invertibile se limitiamo il suo dominio all'intervallo $[0, \pi]$, in cui la funzione è monotona. La sua inversa è la funzione $f(x) = \arccos(x)$. La sua inversa $f(x) = \arccos(x)$ è definita in $[-1, 1]$ a valori in $[0, \pi]$.

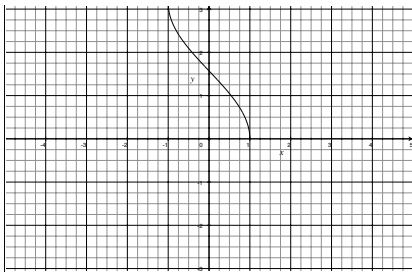


Grafico di $f(x) = \arccos x$

La funzione

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, è periodica di periodo π

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta.$$

È una funzione dispari

$$\tan(-x) = -\tan x$$

ed è ovunque crescente.

Per alcuni angoli noti

$$\tan 0 = 0 \quad \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Se restringiamo lo studio della funzione tangente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, utilizzando la stessa notazione per indicare la funzione in tale intervallo la funzione risulta iniettiva e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. La funzione tangente è invertibile: la funzione inversa è indicata con

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

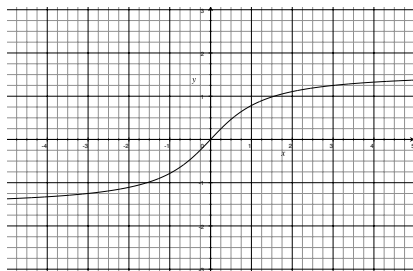


Grafico di $f(x) = \arctan x$

Limiti

- Limiti per $x \rightarrow +\infty$ di $f(x)$ (dominio di f superiormente illimitato)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists k > 0 : \forall x \in X, x > k \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

Esempio di funzione che ammette un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = \arctan x \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

La retta $y = \frac{\pi}{2}$ per $x \rightarrow +\infty$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0 \exists k > 0 : \forall x \in X, x > k \quad f(x) > M$$

Esempio di funzione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ricordiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

Limite definizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0 \exists k > 0 : \forall x \in X, x > k \quad f(x) < -M$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)^{1/3} = -\infty$$

Limiti per $x \rightarrow -\infty$ di $f(x)$ (dominio di f inferiormente illimitato)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists k > 0 : \forall x \in X, x < -k \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

Esempio di asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$

$$f(x) = \arctan x \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$a > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad (ay = x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (-y = x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \dots + b_r} = \frac{a_0}{b_0} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{k-r}.$$

Mettendo in evidenza la massima potenza del numeratore e del denominatore si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \dots + b_r} &= \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^k \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_k}{x^k} \right)}{x^r \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_r}{x^r} \right)} &= \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \dots + b_r} &= \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^k}{b_0 x^r} &= \frac{a_0}{b_0} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{k-r}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + bx + c} - x$$

$$x > 0$$

$$\sqrt{x^2 + bx + c} - x = (\sqrt{x^2 + bx + c} - x) \frac{\sqrt{x^2 + bx + c} + x}{\sqrt{x^2 + bx + c} + x} =$$

$$\frac{bx + c}{\sqrt{x^2 + bx + c} + x} = \frac{x(b + \frac{c}{x})}{\sqrt{x^2(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2})} + x} =$$

$$\frac{x(b + \frac{c}{x})}{x(\sqrt{(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2})} + 1)} = \frac{b}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0 \quad b > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{e^x} = 0 \quad b > 0$$


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0 \exists k > 0 : \forall x \in X, x < -k \quad f(x) > M$$

Esempio di funzione

$$f(x) = |x|, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$$


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0 \exists k > 0 : \forall x \in X, x < -k \quad f(x) < -M$$

$$f(x) = x^3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

Non esistono i seguenti limiti


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$$


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x.$$

Per dimostrare che il limite non esiste occorre trovare due successioni x_n e x'_n che tendono a $+\infty$, ma tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x'_n)$$

$$x_n = n\pi \quad x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$$

Per dimostrare che il limite non esiste occorre trovare due successioni x_n e x'_n che tendono a $+\infty$, ma tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sin(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n \sin(x'_n)$$

$$x_n = n\pi \quad x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$x_n \sin(x_n) = 0, \quad x'_n \sin(x'_n) \rightarrow +\infty$$

Esistono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x - x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x - x \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x - x \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 - x = +\infty$$

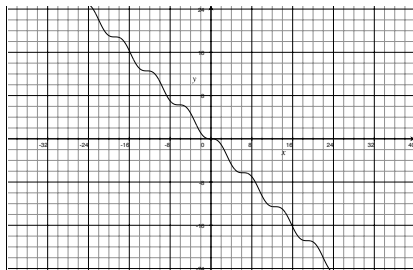


Grafico di $f(x) = \sin x - x$

Rispetto alle successioni, il concetto di limite per $x \rightarrow x_0$ di $f(x)$ è nuovo. Per avvicinarci a x_0 da punti x dobbiamo assumere x_0 punto di accumulazione per il dominio di f (ossia che in un qualunque intorno di x cadano infiniti punti del dominio di f da cui ci possiamo avvicinare)

► Si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\frac{\sin(x)}{x}$ è una funzione pari, è sufficiente considerare il caso $x > 0$
 inoltre, si può supporre $x < \frac{\pi}{2}$. Per tali valori di x si ha

$$0 < \sin x \leq x \leq \tan x$$

che, considerando i reciproci, implica

$$\frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Moltiplicando per $\sin x$ si ottiene

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x.$$

Quindi, dato che $\cos x$ tende a 1 per x che tende a zero, per il teorema del confronto il limite in mezzo ha lo stesso valore degli altri due.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Moltiplicando il denominatore e il numeratore per $1 + \cos(x)$ abbiamo che:

$$\frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{x^2(1 + \cos(x))} = \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2(1 + \cos(x))}$$

Ma $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2(1 + \cos(x))} =$$

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos(x)} =$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{1}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax}$$

Facendo un cambio di variabile $y = ax$ si ottiene che

$$\frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) < -M$$

► Limite destro

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < x - x_0 < \delta \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < x - x_0 < \delta \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < x - x_0 < \delta \quad f(x) < -M$$

► Limite sinistro

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, -\delta < x - x_0 < 0 \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, -\delta < x - x_0 < 0 \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, -\delta < x - x_0 < 0 \quad f(x) < -M$$

Se la funzione ammette limite allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

e viceversa. Per funzioni che non sono definite rispettivamente a sinistra o a destra di x_0 si può passare al limite solo da una direzione. Si distingue talvolta il limite sinistro dal limite destro.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Caso di non esistenza di limite per $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x},$$

infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Non esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

Verificare

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$y = \frac{1}{x}$. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha $y \rightarrow +\infty$ e Per $x \rightarrow 0^-$ si ha $y \rightarrow -\infty$.
Pertanto, considerando separatamente i due limiti, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

.

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (y = (1+x)^{\frac{1}{x}})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow e} \ln y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad (y = e^x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 1$$

Data $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I non vuoto, x_0 punto di accumulazione per I .

- ▶ Dare la definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$
- ▶ Dare la definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.
- ▶ Fare un esempio di una funzione f tale che $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ non esiste.

Continuità

Sia dato un punto x_0 nell'insieme di definizione di una funzione f , con x_0 punto di accumulazione per il dominio di f .

f si definisce continua in x_0 se il suo limite per $\rightarrow x_0$ coincide con il suo valore in x_0 , ovvero con $f(x_0)$. In simboli:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè l'operazione di limite in x_0 commuta con la funzione f

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right).$$

Teorema di permanenza del segno

La somma e il prodotto di funzioni continue è una funzione continua. Vale inoltre

Sia f è una funzione continua in x_0 e definita in un intorno del punto. Se $f(x_0) > 0$ allora esiste $\delta > 0$ con la proprietà $f(x) > 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Minimo e massimo assoluti per funzioni continue

Data $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ il minimo m e il massimo (assoluti) M di f , se esistono, sono valori verificanti

$$f(x) \geq m = f(x_m) \quad f(x) \leq M = f(x_M), \quad \forall x \in [a, b]$$

Theorem

Teorema di Weierstrass *Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato assume il massimo e il minimo assoluti.*

Il minimo e il massimo assoluti della funzione di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato sono da cercare agli estremi dell'intervallo a e b e all'interno dell'intervallo.

Teorema degli zeri

Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ tale $f(a)f(b) < 0$ ammette almeno un punto interno x_0 a $[a, b]$ in cui $f(x_0) = 0$.

Vale il teorema dei valori intermedi.

Theorem

Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato assume tutti i valori compresi tra il minimo m e il massimo assoluti M .

Proof.

Sia $p \in [m, M]$, Se p vale m o M il teorema è dimostrato.

Prendiamo $p \in (m, M)$. Sia x_m e x_M tale che

$$f(x_m) = m \quad f(x_M) = M$$

Allora

$$F(x) = f(x) - p,$$

è una funzione continua su un insieme chiuso e limitato, che vale

$$F(x_m) = f(x_m) - p < 0,$$

$$F(x_M) = f(x_M) - p > 0,$$

si ha che esiste (teorema degli zeri) un punto ξ per cui

$$F(\xi) = f(\xi) - p = 0,$$

ossia

$$f(\xi) = p$$

Classificazione delle discontinuità

- Discontinuità eliminabile:

$$\frac{\sin x}{x}$$

Estensione continua

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

- Discontinuità di prima specie: esistono i limiti destro e sinistro ma sono diversi tra loro. Esempio

$$f(x) = [x]$$

- Discontinuità di seconda specie: se almeno uno dei due limiti (destro o sinistro) non esiste oppure è infinito.

La discontinuità di prima specie viene chiamata anche discontinuità con salto, perchè il grafico della funzione con questo tipo di discontinuità salta in corrispondenza del punto di discontinuità.

Esercizio Determinare il lavoro di a , se esiste, per cui la funzione risulti continua.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2a & x \geq 1 \\ x^2 - ax + 3 & x < 1 \end{cases}$$

Esercizio

$$2x + 2a = x^2 - ax + 3$$

per $x = 1$

$$1 - 3a + 1 = 0$$

dunque $a = 2/3$.

Esercizio (seconda specie)

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \sin x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} e^{\frac{1}{x}} \sin x =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y \frac{1}{y} = +\infty$$

Rapporti incrementali.

Sia $x \in E(f)$, sia Δx un incremento positivo, tale che $x + \Delta x$ sia ancora in $E(f)$, consideriamo

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$


$$f(x) = c \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0.$$


$$f(x) = x \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 1.$$


$$f(x) = x^2 \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$


$$f(x) = x^3 \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + (\Delta x)^2 + 3x\Delta x.$$

$$f(x) = x^n \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$\frac{(x + \Delta x - x)}{\Delta x} ((x + \Delta x)^{n-1} + x(x + \Delta x)^{n-2} + \dots + x^{n-2}(x + \Delta x) + x^{n-1})$$

$$f(x) = e^x \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$



$$f(x) = \log x \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} = \log\left(1 + \frac{1}{x}\Delta x\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$



$$f(x) = \sin x \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$



$$f(x) = \cos x \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \frac{-2 \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

Derivabilità

Data una funzione f definita in un intorno di x_0 , diciamo $I(f)$, f si dice derivabile nel punto x_0 se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Seguendo la notazione di Lagrange il valore del limite si indica con $f'(x_0)$ e si chiama derivata prima della funzione in x_0 .

Anche Sia $x \in E(f)$, sia Δx un incremento positivo, tale che $x + \Delta x$ sia ancora in $E(f)$, consideriamo

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

f si dice derivabile in x_0 e il valore del limite si indica con $f'(x_0)$.
Le due condizioni sono equivalenti.

Con la notazione o *piccolo*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

Se la funzione $f(x)$ è derivabile in ogni punto di un dato intervallo (a, b) , allora si dice che essa è derivabile in (a, b) , e la funzione $f'(x)$ che associa ad ogni punto x la derivata di f in x è la funzione derivata di f . Possiamo pensare la derivata come un operatore che associa, in ipotesi di esistenza, ad una funzione la sua derivata.

Osserviamo che

►

$$f(x) = c \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0.$$

►

$$f(x) = x \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 1.$$

►

$$f(x) = x^2 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x$$

►

$$f(x) = x^3 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3x^2 + (\Delta x)^2 + 3x\Delta x = 3x^2$$

►

$$f(x) = x^n \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x - x)}{\Delta x}$$

$$= \left((x + \Delta x)^{n-1} + x(x + \Delta x)^{n-2} + \dots x^{n-2}(x + \Delta x) + (x)^{n-1} \right)$$

$$= nx^{n-1}$$

▶

$$f(x) = e^x \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x$$

▶

$$f(x) = \log x \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log\left(1 + \frac{1}{x}\Delta x\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \frac{1}{x}$$


$$f(x) = \sin x \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x$$


$$f(x) = \cos x \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin x$$

La derivata vista come un operatore è lineare, cioè la derivata di una combinazione lineare di funzioni derivabili è la combinazione lineare delle derivate delle singole funzioni, e la derivata del prodotto di uno scalare per una funzione è il prodotto dello scalare per la derivata della funzione:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

Simbolo di Landau: o piccolo

Il simbolo *o piccolo* $o(x)$ significa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

Valgono le seguenti proprietà

$$o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$$

Perchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n) + o(x^n)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

$$o(x^n) - o(x^n) = o(x^n)$$

Perchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n) - o(x^n)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-o(x^n)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

$$co(x^n) = o(cx^n) = o(x^n), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Perchè

$$c \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

Perchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(cx^n)}{x^n} = 0.$$

$$o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$$

Perchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)o(x^m)}{x^{n+m}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^m)}{x^m} = 0$$

$$o(o(x^n)) = o(x^n)$$

Perchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(o(x^n))}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(o(x^n))}{o(x^n)} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

Proof.

Dimostriamo l'asserto per $x = x_0$. Infatti se f e g sono derivabili in x_0 , per $h \rightarrow 0$

$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h+o(h) \quad g(x_0+h)-g(x_0) = g'(x_0)h+o(h)$$

Dunque

$$\begin{aligned} f(x_0+h)+g(x_0+h)-(f(x_0)+g(x_0)) &= f'(x_0)h+g'(x_0)h+o(h)+o(h) = \\ &= f'(x_0)h + g'(x_0)h + o(h). \end{aligned}$$

Da cui $f + g$ è derivabile in x_0 e vale l'asserto. Inoltre

$$cf(x_0+h) - cf(x_0) = cf'(x_0)h + co(h) = cf'(x_0)h + o(h).$$

Da cui cf è derivabile in x_0 e vale l'asserto. □

Valgono le regole di derivazione

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

Derivata della tangente di x .

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \sin x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Calcolare in base alla definizione la derivata di $\sqrt{x}$

Derivata della funzione composta

Theorem

Se g è una funzione derivabile in x e f è una funzione derivabile in $g(x)$ allora vale

$$Df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Esempio

$$D(e^{x^2}) = 2xe^{x^2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Calcolare le derivate

Derivata di x^x

Derivata della funzione inversa

- ▶ Derivata di $f(x) = \arcsin(x)$

$$D(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- ▶ Derivata di $f(x) = \arccos(x)$

$$D(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- ▶ Derivata di $f(x) = \arctan(x)$

$$D(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

Significato geometrico della derivata

Geometricamente la derivata di una funzione f in un punto x_0 è il valore del coefficiente angolare, cioè la tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla retta tangente un punto della curva di equazione $y = f(x)$ e il semiasse positivo delle x .

Equazione della retta tangente

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Equazione delle retta tangente alla funzione e^x nel punto $x = 1$.

Monotonia: crescita e decrescenza

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diciamo che

- ▶ f è crescente $\iff f(x_1) \leq f(x_2) \ x_1 < x_2, \ x_1, x_2 \in I$
- ▶ f è strettamente crescente $\iff f(x_1) < f(x_2) \ x_1 < x_2, \ x_1, x_2 \in I$
- ▶ f è decrescente $\iff f(x_1) \geq f(x_2) \ x_1 < x_2, \ x_1, x_2 \in I$
- ▶ f è strettamente decrescente
 $\iff f(x_1) > f(x_2) \ x_1 < x_2, \ x_1, x_2 \in I$

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ è crescente $f(x) = x$ è strettamente crescente,
 $f(x) = e^x$ è strettamente crescente per ogni x reale, $f(x) = e^{-x}$ è
strettamente decrescente per ogni x reale, $f(x) = x^2$ è
strettamente crescente per $x \geq 0$ è strettamente decrescente
 $x \leq 0$; in $x = 0$ la funzione cambia la monotonia: $x = 0$ è un
punto critico o stazionario, cambiando da decrescente per valori
più piccoli a crescente per valori più grande il punto è di minimo
relativo.

Sussiste il seguente teorema di monotonia

Theorem

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I con $f'(x) > 0 \forall x \in I$ allora f è strettamente crescente. Se f è strettamente crescente e derivabile in I allora $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$

Se $f'(x) > 0 \forall x \in I$ allora il teorema di permanenza del segno garantisce l'esistenza di un intorno del punto in cui la funzione mantiene il segno del limite. Per h sufficientemente piccolo

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

Se $h > 0$ allora

$$f(x+h) - f(x) > 0$$

e la funzione è strettamente crescente. Se $h < 0$ allora

$$f(x+h) - f(x) < 0$$

e la funzione è strettamente crescente

In conclusione

$$h > 0, x + h > x \quad f(x + h) > f(x)$$

$$h < 0, x + h < x \quad f(x + h) < f(x),$$

e la funzione è strettamente crescente.

Dimostrare l'altra implicazione per esercizio.

Osserviamo che la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ ma in $x = 0$ la sua derivata prima vale 0.

Analogo risultato per altri casi.

Concavità e Convessità

Definition

Sia C aperto. C è convesso $\iff x, y \in C$ implica $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ con $\lambda \in [0, 1]$.

Definition

Sia C aperto e convesso. Una funzione $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad \forall x, y \in C, \lambda \in [0, 1].$$

$f : C \rightarrow \mathbb{R}$ è concava se $-f$ è convessa.

Esempio $f(x) = |x|$

Per funzioni C^1 vale la proprietà Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e f convessa in C . Allora ogni punto x_0 in cui $f'(x_0) = 0$ risulta di minimo assoluto. Si dimostra a partire dalla caratterizzazione C^1 di funzioni convesse

$$\forall x, x_0 \in C$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Esercizio. Dimostrare che $e^x \geq 1 + x \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}$.

Concavità

$$\forall x, x_0 \in C$$

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Esercizio. Dimostrare che $\ln(1 + x) \leq x \quad \forall x, x_0 \in (-1, +\infty)$.

Per funzioni C^2 vale la proprietà

$f''(x) > 0$ in $C \implies$ convessa in C

$f''(x) < 0$ in $C \implies$ concava in C .

Cambiamento di base nel logaritmo

Se b , x e k sono tutti numeri reali positivi (con $b \neq 1$ e $k \neq 1$):

$$\log_b x = \frac{\log_k x}{\log_k b}$$

con k una base qualsiasi. La formula viene anche scritta nel modo seguente

$$\log_k b \cdot \log_b x = \log_k x$$

e segue dalla relazione

$$k^{\log_k b \cdot \log_b x} = (k^{\log_k b})^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x.$$

Dalla formula del cambiamento di base, ponendo $k = x$, si ricava la relazione seguente:

$$\log_b x = \frac{1}{\log_x b}.$$

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Formula della derivata

$$D(\log_b x) = \frac{1}{\ln b} \frac{1}{x}$$

Vale anche

$$D(a^x) = a^x \ln a$$

Minimi e massimi interni per funzioni derivabili: Teorema di Fermat

Nello studio di funzione ha interesse definire i minimi e massimi relativi o locali. Sono punti di minimo e massimo in cui la disuguaglianza è verificata in un intorno del punto e potrebbe non essere verificata in tutto l'intervallo. Data $f : E = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ il massimo relativo M di f e il minimo relativo m , se esistono, verificano

- $x_0 \in [a, b]$ (punto di massimo) tale che $f(x_0) = M$ e

$$\exists r > 0 : f(x) \leq M \quad \forall x \in I_r(x_0) \subset [a, b],$$

ove $I_r(x)$ è un intorno di x_0 di ampiezza $2r$.

- $x_1 \in [a, b]$ (punto di minimo) tale che $f(x_1) = m$ e

$$\exists r > 0 : f(x) \geq m \quad \forall x \in I_r(x_1) \subset [a, b].$$

Teorema di Fermat

Il teorema di Fermat stabilisce che una funzione che ammette un massimo o un minimo relativo in un punto interno del dominio, e che sia ivi derivabile, ha la derivata prima nulla nel punto.

Theorem

Sia

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione e si supponga che $x_0 \in (a, b)$ sia un punto di estremo locale di f (punto di minimo o massimo relativo). Se f è derivabile nel punto x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

Proof.

Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo relativo interno all'intervallo. Per h piccolo si ha

$$f(x_0 + h) \geq f(x_0).$$

Pertanto per h piccolo

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad h > 0,$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad h < 0$$

Per la derivabilità di f si avrà $f'(x_0) = 0$.



Teorema di Rolle e Lagrange

Theorem

Teorema di Rolle *Sia f una funzione continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e sia $f(a) = f(b)$. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.*

Proof.

Il punto in cui è assunto massimo e il punto in cui è assunto il minimo potrebbero trovarsi negli estremi. Dall'ipotesi $m = M$ segue che la funzione è costante. Altrimenti almeno uno dei due è interno e l'asserto segue dal teorema di Fermat.



Theorem

Teorema di Lagrange *Sia f una funzione continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) . Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

.

Proof.

Si introduce la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La funzione g è una funzione continua in $[a, b]$, e derivabile in (a, b) . Inoltre $g(a) = g(b)$. Applicando il teorema di Rolle esisterà un punto x_0 tale che

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

da cui l'asserto



Dimostrare

$$\ln x \leq x - 1, \quad \forall x > 0$$

- ▶ dimostrazione n.1 Funzioni concave e derivabili.
- ▶ dimostrazione n.2

$$f(x) = \ln x - x + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

Il punto $x = 1$ è di massimo per f . Ne segue

$$f(x) \leq f(1) = 0$$

Teorema di De l'Hopital

La regola di de l'Hopital è un procedimento che permette di calcolare limiti di quozienti di funzioni reali di variabile reale che danno luogo alle forme indeterminate

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Ricordiamo le forme indeterminate riconducibile alle precedenti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) \quad \boxed{0 \cdot \infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} \quad \boxed{1^\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$$

$$0^0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}}$$

Siano f e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) , sia $g(x)$, $g'(x)$ e diverse da 0 in ogni punto di tale intervallo, tranne al più in $x_0 \in (a, b)$. Sia inoltre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

Se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Esempi di applicazione



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x) - 4 \sin x + 8x^2}{x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{1+4x} - 4 \cos x + 16x}{3x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{1+4x} - 4 \cos x + 16x \pm 4}{3x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 - \cos x)}{3x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + 4(1 + 4x)(4x - 1)}{3x^2(1 + 4x)} = \frac{4}{6} + \frac{64}{3} = 22$$


$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x} = +\infty$$

Commento sul calcolo



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Lo sviluppo di Mac Laurin

Data f derivabile n volte, Il polinomio di Mac Laurin è dato da

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Vale

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

Sviluppo di e^x

Dimostrare per induzione che

$$D^n e^x = e^x.$$

Osserviamo che

$$D^n e^x \Big|_{x=0} = 1$$

Allora

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$$

Sviluppo di $\sin x$

Dimostrare per induzione che

$$D^n \sin x = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

Osserviamo che

$$\left. D^n \sin x \right|_{x=0} = \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

Allora

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Sviluppo di $\cos x$

Dimostrare per induzione che

$$D^n \cos x = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

Osserviamo che per n pari

$$D^n \cos x \Big|_{x=0} = \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^{\frac{n}{2}},$$
$$\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Allora

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

Per le funzioni $\sin x$ e $\cos x$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0$$

Sviluppo di $\ln(1+x)$

Dimostrare per induzione che

$$D^n \ln(1+x) = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{(1+x)^n}$$

Si ha

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{k!} \left[\frac{1}{(1+x)^n} \right]_{x=0} x^k + o(x^n)$$

Allora

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k + o(x^n)$$

Vale la rappresentazione in serie di Taylor

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Andiamo ora a dimostrare la formula di Eulero.

Per $z \in \mathbb{C}$, si ha

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Poichè $z = x + iy$ si ha

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} =$$

$$e^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Osserviamo che le potenze dell'unità immaginaria i si ripetono periodicamente (sono cicliche con periodo 4):

$$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i$$

Serie di Taylor

In generale non vale un risultato di convergenza della serie alla funzione f , anche se la funzione è derivabile infinite volte. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

è derivabile infinite volte in $x = 0$, e la sua serie di Taylor in $x = 0$ (Serie di Mac Laurin) è la funzione identicamente nulla.

Si ha in $\mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Dopo aver disegnato il grafico, determinare la serie di Taylor di

$$\cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Funzioni iperboliche:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \text{per ogni } x;$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad \text{per ogni } x$$

Per $|x| < 1$, vale

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k.$$

La convergenza si può estendere al caso $x = 1$ e vale

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}.$$

Funzione esponenziale e logaritmo naturale:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{per ogni } x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad \text{per } |x| < 1.$$

Serie geometrica:

$$\frac{x^m}{1-x} = \sum_{n=m}^{\infty} x^n, \quad \text{per } |x| < 1.$$

Funzioni trigonometriche:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \text{per ogni } x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \text{per ogni } x$$

Funzioni iperboliche:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \text{per ogni } x;$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad \text{per ogni } x$$

La formula di Taylor

Data f derivabile n volte, fissato x_0 ci poniamo il problema dell'esistenza di un polinomio di grado non superiore a n

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i (x - x_0)^i,$$

che abbia la proprietà

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Lemma

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0) - P_n(x_0) = 0, \\ f'(x_0) - P'_n(x_0) = 0, \\ \dots \\ \dots \\ f^n(x_0) - P^n_n(x_0) = 0, \end{array} \right.$$

Assumiamo

$$\begin{cases} f(x_0) - P_n(x_0) = 0, \\ f'(x_0) - P'_n(x_0) = 0, \\ \dots \\ \dots \\ f^n(x_0) - P^n_n(x_0) = 0, \end{cases}$$

dobbiamo dimostrare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Applicando ripetutamente il teorema di De l'Hopital, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - P'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} &= \\ &\dots\dots \\ &= \frac{f^n(x_0) - P^n_n(x_0)}{n!} = 0, \end{aligned}$$

questo conclude la prima parte.

Supponiamo ora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

e per assurdo

$$f^k(x_0) - P_n^k(x_0) \neq 0,$$

per qualche $k \leq n$.

Allora, applicando ripetutamente il teorema di De l'Hopital, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^k} = \frac{f^k(x_0) - P_n^k(x_0)}{k!} \neq 0$$

Ma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^k} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} (x - x_0)^{n-k} = 0,$$

una contraddizione.

Si osservi

$$D^k(x-x_0)^n = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Si ha

$$D^k \sum_{i=0}^n a_i(x-x_0)^i = \sum_{i=k}^n i(i-1)(i-2)\dots(i-k+1)a_i(x-x_0)^{i-k}$$

Per trovare il polinomio imponiamo

$$f^k(x_0) - \sum_{i=k}^n i(i-1)(i-2)\dots(i-k+1)a_i(x-x_0)^{i-k}|_{x=x_0} = 0$$

$$k = 0, \dots, n$$

In $x = x_0$ si annullano tutti i termini eccetto il termine corrispondente a $i = k$

$$f^k(x_0) - k!a_k = 0 \quad k = 0, \dots, n$$

ossia

$$a_k = \frac{f^k(x_0)}{k!}, \quad k = 0, \dots, n$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^i(x_0)}{i!} (x - x_0)^i,$$

Vale

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Minimi e Massimi

Per studiare i massimi e i minimi relativi possiamo guardare il segno della derivata seconda. Infatti se $f''(x_0) > 0$ e $f'(x_0) = 0$, dalla formula

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) > 0,$$

per x sufficientemente vicino a x_0 e $f(x) - f(x_0) > 0$ ossia $f(x) > f(x_0)$, per x sufficientemente vicino a x_0 . Studio di funzione

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2}$$

Calcolo di limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + \ln(1+x) - \ln e}{(\cosh x - 1) \sinh x}$$

Numeratore

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{per ogni } x$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \quad \text{per ogni } x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad \text{per } |x| < 1.$$

Denominatore.

Funzioni iperboliche:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \text{per ogni } x$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad \text{per ogni } x$$

Per $x \rightarrow 0$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$e^{-x} - \ln(1+x) - 1 = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Per $x \rightarrow 0$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\sinh(x) = x + o(x^2)$$

$$(\cosh x - 1) \sinh x = \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)$$

In conclusione il valore del limite è $\frac{1}{3}$

Calcolare i minimi e i massimi della funzione

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \quad \frac{1}{100} \leq x \leq 100$$

Studio del grafico di

$$f(x) = \sqrt{e^x - e^{4x}}$$

Calcolo dell'area

Calcoliamo l'area A del segmento di parabola

$$f(x) = x^2 \quad a \leq x \leq b.$$

Calcoliamo un'approssimazione per eccesso dell'area A .

$$S_N = \sum_{n=1}^N M_n (x_n - x_{n-1}), \quad M_n = f(x_n) = \sup_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)$$

Poichè

$$M_n = x_n^2 = \left(a + \frac{(b-a)n}{N} \right)^2,$$

si ottiene

$$S_N = \sum_{n=1}^N \left(a + \frac{(b-a)n}{N} \right)^2 \frac{(b-a)}{N},$$

$$S_N = \frac{(b-a)}{N} \left(\sum_{n=1}^N a^2 + 2a \frac{(b-a)n}{N} + \left(\frac{(b-a)n}{N} \right)^2 \right),$$

Sviluppando i quadrati

$$S_N = \frac{(b-a)}{N} \left(a^2 N + 2a \frac{(b-a)}{N} \sum_{n=1}^N n + \left(\frac{(b-a)}{N} \right)^2 \sum_{n=1}^N n^2 \right)$$

$$S_N = \frac{(b-a)}{N} \left(a^2 N + 2a \frac{(b-a)^2}{N} \frac{N(N+1)}{2} + \left(\frac{(b-a)}{N} \right)^2 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \right) =$$

$$S_N = (b-a) a^2 \frac{N}{N} + a \frac{(b-a)^2 N(N+1)}{N^2} + \left(\frac{(b-a)}{N} \right)^3 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Per $N \rightarrow +\infty$,

$$S(x) \rightarrow (b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} =$$

$$a^2b - a^3 + ab^2 + a^3 - 2a^2b + \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} + a^2b - ab^2 = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Sviluppare per esercizio l'approssimazione per difetto, tenendo conto che $m_n = f(x_{n-1}) = \inf_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)$ dimostrare che per $N \rightarrow +\infty$, vale

$$s_N \rightarrow \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

In forza di

$$s_N \leq A \leq S_N,$$

per $N \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$A = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

La partizione che abbiamo scelto dell'intervallo $[a, b]$ è fornita da un insieme di $N + 1$ punti equispaziati la cui unione disgiunta fornisce $[a, b]$, e l'ampiezza dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ è $\frac{b-a}{N}$. In realtà possiamo pensare partizioni dell'intervallo più complicate, osserviamo però che non è detto che aumentando i punti otteniamo un'approssimazione migliore. Ad esempio nel caso in cui i punti in più vengono aggiunti in una zona dove la funzione è piatta: non aggiungiamo termini che danno luogo a una migliore approssimazione.

Definizione di integrale

Occorre calcolare le somme inferiori e superiori su partizioni diverse. Per confrontare due qualsiasi partizioni si usa l'unione delle due partizioni e le seguenti proprietà: Se A e B sono due intervalli vale



$$\inf_A f(x) \geq \inf_B f(x), \quad \text{se } A \subset B$$



$$\sup_A f(x) \leq \sup_B f(x), \quad \text{se } A \subset B$$

Si dimostra che data una funzione limitata in un intervallo, date due partizioni qualunque $\mathcal{P}_1 = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{x_1, \dots, x_M\}$ le somme inferiori sono minori o uguali delle somme superiori, ossia

Theorem

$$s = \sum_{n=1}^N \inf_{(\xi_{n-1}, \xi_n)} f(\xi)(\xi_n - \xi_{n-1}) \leq \sum_{n=1}^M \sup_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)(x_n - x_{n-1}) = S$$

La dimostrazione del teorema è conseguenza del seguente lemma

Lemma

Si considerino due partizioni $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ e la loro unione $\mathcal{P}_3$. Allora

$$s(\mathcal{P}_1) \leq s(\mathcal{P}_3) \leq S(\mathcal{P}_3) \leq S(\mathcal{P}_2)$$

Sia $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$. Allora confrontiamo le partizioni $\mathcal{P}_1 = \{x_1, \dots, x_N\}$ e $\mathcal{P}_3$. La partizione $\mathcal{P}_3$ conterrà almeno un punto in più (in caso di più punti il ragionamento si itera il ragionamento): ζ e $\zeta \in (x_{k-1}, x_k)$, per qualche k .

Allora

$$s(P_1) = \sum_{n=0}^N \inf_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)(x_n - x_{n-1}) =$$

$$\sum_{n=1}^{k-1} \inf_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) +$$

$$\inf_{(x_{k-1}, x_k)} f(x)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{n=k+1}^N \inf_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) =$$

$$\sum_{n=1}^{k-1} \inf_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) +$$

$$\inf_{(x_{k-1}, x_k)} f(x)(z - x_{k-1}) + \inf_{(x_{k-1}, x_k)} f(x)(x_k - z) + \sum_{n=k+1}^N \inf_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n)$$

In forza di

$$\inf_{(x_{k-1}, x_k)} f(x)(x_k - x_{k-1}) \leq \inf_{(x_{k-1}, z)} f(x)(z - x_{k-1})$$

$$\inf_{(x_{k-1}, x_k)} f(x)(x_k - x_{k-1}) \leq \inf_{(z, x_k)} f(x)(x_k - z).$$

Quindi

$$s(P_1) \leq \sum_{n=1}^{k-1} \inf_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) +$$

$$\inf_{(x_{k-1}, z)} f(x)(z - x_{k-1}) + \sum_{n=k+1}^N \inf_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) = s(\mathcal{P}_3)$$

Quindi

$$s(P_1) \leq s(\mathcal{P}_3).$$

Dimostrare per esercizio la rimanente parte.

Se $\sup s = \inf S$, al variare comunque della partizione, si definisce integrale di Riemann di una funzione limitata in un intervallo tale valore e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx = \sup s = \inf S.$$

Non tutte le funzioni limitate in un intervallo sono integrabili secondo Riemann. Ad esempio, la funzione di Dirichlet non è integrale secondo Riemann in $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sfruttando la densit'a di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, si verifica che $s(x) = 0$ per ogni partizione e $S(x) = 1$ per ogni partizione.

Proprietà dell'integrale

Valgono le seguenti proprietà

1.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

3.

$$\int_a^b c_1 f(x) + c_2 g(x)dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx$$

4. $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Funzioni continue

Una classe di funzioni integrabili secondo Riemann in un intervallo $[a, b]$ è la classe delle funzioni continue in $[a, b]$.

Primitive

Definition

Una funzione F è una primitiva di una funzione f continua in $[a, b]$ se F è derivabile $F'(x) = f(x)$ in $[a, b]$.

La caratterizzazione delle funzioni primitive assume allora un ruolo fondamentale.

Data una funzione primitiva di f ne esistono altre che non siano un'addizione di F con una qualsiasi costante? Osserviamo che mentre dire che se F è primitiva di f , allora $F + c$ è ancora primitiva è una conseguenza banale del fatto che la derivata di una costante è zero, non è banale dire che tutte le funzioni primitive sono fatte così'.

Theorem

Se F e G sono due primitive di f in $[a, b]$ allora $F = G + c$.

La dimostrazione si basa su una conseguenza del teorema di Lagrange

Theorem

Se f ha derivata nulla in (a, b) allora f è una costante.

Allora applicando il precedente risultato Se

$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ allora
 $(F - G)(x) = c$ e $F = G + c$.

Per le funzioni continue in $[a, b]$ vale il teorema della media integrale.

Theorem

Sia f continua in $[a, b]$. Allora esiste x_0 in $[a, b]$ tale che

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Proof.

Dalle stime sulle somme inferiori e superiori si ha la stima

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

dove

$$m = \min_{[a,b]} f(x) \quad M = \max_{[a,b]} f(x).$$

Quindi

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

è un valore compreso, tra il minimo e il massimo. Il risultato segue allora dal teorema dei valori intermedi per funzioni f continue in $[a, b]$. □

Vale il teorema fondamentale del calcolo integrale

Theorem

Sia f continua in $[a, b]$. Indichiamo con

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

allora F è una primitiva della funzione f .

Proof.

Si considera il rapporto incrementale

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] =$$

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x(h)),$$

per il teorema della media integrale. Vale

$$\lim_{h \rightarrow 0} x(h) = x, \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(x(h)) = f(\lim_{h \rightarrow 0} x(h)) = f(x)$$

Quindi esiste finito

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

e vale $f(x)$.



Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue la formula fondamentale del calcolo integrale (il problema dell'integrazione è ricondotto al calcolo di funzioni primitive).

Theorem

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Proof.

Si ha

$$F(x) = c + \int_a^x f(t)dt,$$

sostituendo $x = a$ si ottiene $F(a) = c$,

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)dt,$$

ossia

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt,$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan f(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int f'(x) \cos f(x) \, dx = \sin f(x) + C$$

$$\int f'(x) \sin f(x) \, dx = -\cos f(x) + C$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

Calcolare l'integrale

$$\int_{-3}^3 |x+2| + |x-1| dx.$$

r. Abbiamo

$$\int_{-3}^{-2} (-x-2) + (-x+1) dx = \int_{-3}^{-2} -2x-1 dx = -x^2 - x \Big|_{-3}^{-2} = 4,$$

$$\int_{-2}^1 (x+2) + (-x+1) dx = \int_{-2}^1 3 dx = 3x \Big|_{-2}^1 = 9,$$

$$\int_1^3 (x+2) + (x-1) dx = \int_1^3 2x+1 dx = x^2 + x \Big|_1^3 = 10.$$

Da cui

$$\int_{-3}^3 |x+2| + |x-1| dx = 23.$$

Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x e^{-t} \sin(\sqrt{t}) dt}{\sin x}.$$

r Il limite è nella forma $\frac{0}{0}$. Applicando de l'Hopital, e utilizzando il teorema fondamentale del calcolo per il numeratore si ha che il limite è 0.

Confronto tra integrali

f e g integrabili in $[a, b]$

1. $f \leq g$ in $[a, b] \implies$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

In particolare

2. $f \geq 0$ in $[a, b] \implies$

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

3.

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Integrazione per parti

Supponiamo che f, g funzioni derivabili,

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int \frac{d}{dx}f(x)g(x)dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Esempio.

Caso integrale definito.

Esempio.

Vogliamo risolvere per parti:

$$\int xe^x dx$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$\int xe^x dx = e^x(x - 1) + C$$

$$I = \int \sin^2 x \, dx.$$

Usando il metodo di integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int \sin(x) \cdot \sin(x) \, dx &= \int \sin(x) \cdot (-\cos(x))' \, dx = \\ &= -\sin(x) \cos(x) + \int \cos^2(x) \, dx = -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int (1 - \sin^2(x)) \, dx. \end{aligned}$$

Dunque

$$\int \sin^2(x) \, dx = x - \sin(x) \cdot \cos(x) - \int \sin^2(x) \, dx$$

quindi abbiamo ottenuto

$$I = \int \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin(x) \cdot \cos(x)) + C.$$

$$\int \ln x dx = \dots$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \int \left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x}\right) dx.$$

Integrazione per sostituzione

Supponiamo che f sia una funzione integrabile, e $\phi(t)$ una funzione derivabile definita sull'intervallo $[a, b]$ con

$$\phi[a, b] \subset \text{dom} f.$$

Si ha

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

Esempio

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx,$$

$$x = \sin t$$

$$dx = \cos t dt$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{4} + 0$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

1. L'integrale di una funzione dispari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine vale 0

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

2. L'integrale di una funzione pari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine vale

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

1. Calcolare

$$f(x) = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (r. = \sqrt{x^2 + 1} + c)$$

2.

$$\int x \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3}$$

3. Verificare che per $x \geq 0$ la funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$$

è concava.

Calcolare

$$\int_1^2 \frac{1}{3} (x^x (\log x + 1)) dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos^2 x - \sin^2 x| dx.$$

r. Abbiamo

$$\int_1^2 \frac{1}{3} (x^x (\log x + 1)) dx = \frac{2^2 - 1^1}{3} = 1.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos^2 x - \sin^2 x| dx.$$

Calcoliamo il secondo integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos^2 x - \sin^2 x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos 2x| dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{1}{2}.$$

$$r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Definizione. Sia f derivabile $n + 1$ volte, il resto dato dalla formula di Taylor è definito come

$$r(x_0, n, x) = r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Sappiamo (resto di Peano) che

$$r(x_0, n, x) = o((x - x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0.$$

Resto Integrale e di Lagrange.

Deduciamo ora altre espressioni del resto

Teorema. Se f è derivabile $n + 1$ volte, il resto si può esprimere

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!} (x - t)^n dt$$

La dimostrazione del risultato segue il principio di induzione. Per $n = 0$ il risultato segue da

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

Assumiamo vera l'affermazione al passo $n - 1$. Il resto al passo $n - 1$ si esprime

$$r_{n-1}(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Si ha

$$\begin{aligned}r_{n-1}(x_0, x) &= \int_{x_0}^x \frac{f^n(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} dt = \int_{x_0}^x \frac{f^n(t)}{(n-1)!} \left[-\frac{(x-t)^n}{n} \right]' dt = \\&= - \left[\frac{(x-t)^n}{n!} f^n(t) \right]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \\&= \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt\end{aligned}$$

In conclusione

$$r(x_0, n-1, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k =$$
$$\frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt,$$

e quindi

$$r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k =$$
$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k - \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) =$$
$$\int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt.$$

Dalla formula del resto integrale si deduce la formula del resto di Lagrange.

Teorema. Se f è derivabile $n + 1$ volte in un intervallo I e x, x_0 sono punti di I , esiste un punto ξ compreso tra x e x_0 tale che

$$r_n(x_0, x) = f^{n+1}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!},$$

Dimostrazione.

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt =$$

Assumiamo $x > x_0$. In $[x_0, x]$ applichiamo il teorema della media integrale

$$m \leq f^{n+1}(t) \leq M,$$

essendo

$$m = \min_{[x_0, x]} f^{n+1}(t) \quad M = \max_{[x_0, x]} f^{n+1}(t).$$

Abbiamo

$$m \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \leq M \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ossia

$$m \leq \left[\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right]^{-1} \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \leq M$$

Dal teorema dei valori intermedi applicato a f^{n+1} , si ha che esiste ξ per cui

$$f^{n+1}(\xi) = \left[\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right]^{-1} \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt,$$

da cui la tesi.

Calcolo approssimato

$$e^{\pi} \quad e^x = \dots \quad x_0 = 3$$

$$e^{\pi} \approx e^3 + e^3(\pi - 3) + \frac{1}{2}e^3(\pi - 3)^2$$

$$e^3 + e^3(\pi - 3) \approx 22.9295013949$$

$$e^3 + e^3(\pi - 3) + \frac{1}{2}e^3(\pi - 3)^2 \approx 23.1308436331$$

$$e^3 + e^3(\pi - 3) + \frac{1}{2}e^3(\pi - 3)^2 + \frac{1}{6}e^3(\pi - 3)^3 \approx 23.1403464$$

Analisi tramite resto di Lagrange
calcolatrice

$$e^{\pi} \approx 23.1406926328$$

Confronto con π^e Calcolatrice

$$\pi^e \approx 22.4591577184$$

$$\pi^e \approx \pi^2 + \pi^2 \ln(\pi)(e-2) + \frac{1}{2}\pi^2(\ln(\pi))^2(e-2)^2 + \frac{1}{6}\pi^2(\ln(\pi))^3(e-2)^3$$

22.2355

$$\pi^e \approx \pi^2 + \pi^2 \ln(\pi)(e-2) + \frac{1}{2}\pi^2(\ln(\pi))^2(e-2)^2 + \frac{1}{6}\pi^2(\ln(\pi))^3(e-2)^3 +$$
$$\frac{1}{24}\pi^2(\ln(\pi))^4(e-2)^4 \approx 22.4235$$

$$e^\pi > \pi^e$$

Dimostriamo la disuguaglianza tramite studio di funzione

Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x} \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = e \quad f(e) = e^{\frac{1}{e}}$$

Si osserva che il punto $x = e$ è punto di massimo stretto assoluto per la funzione nel suo insieme di definizione $(0, +\infty)$, poiché la funzione è derivabile in $(0, +\infty)$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln x} = 1$$

Dunque

$$e^{\frac{1}{e}} > \pi^{\frac{1}{\pi}},$$

e il risultato segue elevando alla π e ambo i membri.

Integrali impropri

Gli integrali impropri si utilizzano per rendere calcolabili integrali riguardanti intervalli illimitati e/o funzioni non limitate, che non sono trattabili con l'integrale di Riemann. L'integrale di Riemann richiede

- ▶ la limitatezza per l'intervallo di integrazione
- ▶ la limitatezza per la funzione integranda.

$$f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

continua.

Allora si pone:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_a^{\omega} f(x) dx.$$

Esempio: $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{-\alpha+1} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\omega_1 \rightarrow -\infty} \lim_{\omega_2 \rightarrow +\infty} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

$$\int_0^b \ln x dx \quad b \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \int_0^b \ln x dx &= \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \int_{\omega}^b \ln x dx = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} x \ln x - x \Big|_{\omega}^b = \\ &= b \ln b - b - \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \omega \ln \omega - \omega = b \ln b - b \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\omega_1 \rightarrow -1} \lim_{\omega_2 \rightarrow 1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow -1} \lim_{\omega_2 \rightarrow 1} \arcsin x \Big|_{\omega_1}^{\omega_2} = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi$$

Confronto per l' integrabilità.

$$0 \leq f \leq g$$

g integrabile in senso improprio implica f integrabile in senso improprio sullo stesso intervallo.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(4 + \cos x)} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx$$

Se f è integrabile in senso improprio in un intervallo I si dice anche che l'integrale improprio è convergente

Assoluta integrabilità.

Data una funzione $f(x)$, l'integrale improprio di f tra due estremi a, b si dice assolutamente convergente se converge l'integrale di $|f(x)|$ tra a e b .

Se un integrale improprio è assolutamente convergente, allora è convergente, mentre non vale l'implicazione inversa. Il criterio della convergenza assoluta si usa quando $f(x)$ non presenta segno costante in un intorno dell'estremo in cui l'integrale è improprio.

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_0^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

$$\geq \sum_0^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx$$

$$t = x - n\pi$$

$$\sum_0^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) dt = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

E' convergente. Infatti dividendo l'integrale tra 0 e 1 e considerando

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos \omega}{\omega} + \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \right)$$

per integrazioni per parti questo integrale risulta convergente.

Criterio dell'integrale

Si consideri un intero N e una funzione continua non negativa f definita sull'intervallo illimitato $[N, +\infty)$, in cui è monotonamente decrescente. Allora la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$$

converge a un numero reale se e solo se l' integrale improprio

$$\int_N^{\infty} f(x) dx$$

è finito.

Esempio Sia $\alpha > 1$. Dimostrare la convergenza

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx,$$

convergente per $\alpha > 1$.

Esempio

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx$$

convergente per $p > 1$

Studio di funzioni integrali Per $x \geq 0$ studiare

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt,$$

-monotonia, concavità, senza risolvere l'integrale. Studiare la funzione risolvendo l'integrale

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt,$$

-monotonia, concavità, studiare la funzione.

Occorre utilizzare il teorema sul limite di una funzione monotona che stabilisce che il limite di una funzione monotona su un intervallo, per x tendente ad un estremo dell'intervallo, coincide con l'estremo inferiore o superiore della funzione sull'intervallo (a seconda dei casi)

La funzione degli errori (chiamata anche funzione degli errori di Gauss)

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Non integrabile elementarmente: L' integrale che definisce la funzione degli errori non può essere espresso in forma chiusa mediante funzioni elementari, ma l'integrando può essere sviluppato in una serie di potenze che può essere integrata termine a termine.

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} t^{2n} dx = \\ &\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Cenni sulle equazioni differenziali ordinarie

Consideriamo il problema seguente che coinvolge sia la funzione y sia la sua derivata prima y' .
Proponiamoci di risolvere

$$y'(x) = y(x).$$

Si dice soluzione dell'equazione differenziale una funzione y derivabile che soddisfi la relazione definita dall'equazione.

Consideriamo il problema seguente che coinvolge sia la funzione y sia la sua derivata prima y' , sia y''
Proponiamoci di risolvere

$$y''(x) = -y(x).$$

Si dice soluzione dell'equazione differenziale una funzione y derivabile che soddisfi la relazione definita dall'equazione.

Soluzione

$$y_1(x) = \cos x$$

$$y_2(x) = \sin x$$

Verificare che $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ soddisfa $y''(x) = -y(x)$.

Nel caso in cui

$$y' = f(x)$$

la soluzione si trova immediatamente tramite integrazione:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + c$$

$F(x)$ una primitiva di $f(x)$. Dato allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

la sua unica soluzione è data da

$$y = \int_{x_0}^x f(t)dt + y_0$$

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

$(y(x) = \cos x)$.

Assumiamo che la soluzione sia esprimibile in serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + \cdots =$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n \right) x^n = 0$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0$$

Per n dispari i coefficienti sono nulli per n pari

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Un' equazione differenziale lineare ha la forma:

$$Ly = f$$

dove L è un operatore differenziale lineare, y la funzione incognita (che si suppone derivabile n e f una funzione assegnata).

$$L_n(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y$$

Si dice che un' equazione di questo tipo ha ordine n , ossia ordine pari all' ordine della più alta derivata della funzione incognita y presente. Nel caso in cui si abbia $f = 0$ l'equazione è omogenea. Quando le funzioni a_i sono semplicemente dei numeri l'equazione è detta a coefficienti costanti.

Consideriamo una equazione differenziale della forma

$$y' = f(x, y).$$

Una funzione y è soluzione di questa equazione se e solo se in ogni punto $(x, y(x))$ del grafico, la sua retta tangente ha coefficiente angolare y'/x dato da $f(x, y)$.

► Teorema di esistenza di Peano

Sia D un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e si consideri un'equazione differenziale ordinaria esplicita del prim'ordine definita su D :

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Allora ogni problema ai valori iniziali per f :

$$y(x_0) = y_0$$

$$(x_0, y_0) \in D,$$

possiede una soluzione locale

$$z: I \rightarrow \mathbb{R},$$

dove I è un intorno di x_0 in $\mathbb{R}$, tale che

$$z'(x) = f(x, z(x)), \quad \forall x \in I$$

La soluzione può non essere unica, in quanto lo stesso valore iniziale (x_0, y_0) può dare origine a diverse soluzioni z .

L'equazione omogenea a coefficienti costanti:

$$y' + ay = 0$$

dove a è una costante. La soluzione generale di questo caso si ottiene per separazione delle variabili.

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

La soluzione si ottiene tramite esponenziale:

$$y = c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(2) = 5 \end{cases}$$

La soluzione generale dell'omogenea associata

$$y' + y = 0$$

$$c \cdot e^{(x_0 - x)}$$

Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} y' = -y + x \\ y(2) = 5 \end{cases}$$

La soluzione generale dell'omogenea associata

$$y' + y = 0$$

$$y = c \cdot e^{(x_0 - x)}$$

$$y = c \cdot e^{2-x}$$

Una soluzione dell'equazione con termine noto viene poi cercata nella forma:

$$u(x) \cdot e^{-x}$$

Sostituita nell'equazione completa:

$$u'(x) \cdot e^{-x} - u(x) \dot{e}^{-x} + u(x) \cdot e^{-x} = x$$

e dunque:

$$u'(x) \cdot e^{-x} = x$$

$$u'(x) = x \cdot e^x$$

Integrando per parti si ottiene:

$$u(x) = xe^x - e^x - x_0e^{x_0} + e^{x_0}$$

soluzione

$$y = ce^{(x_0-x)} + e^{-x}(xe^x - e^x - x_0e^{x_0} + e^{x_0})$$

e quindi...

$$y = 4 \cdot e^{(2-x)} + x - 1$$

Per trovare una soluzione della non omogenea

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$

si può seguire il metodo delle variazioni delle costanti, cercandola nella forma:

$$y = u(x) \cdot e^{-A(x)}$$

con A una primitiva di a .

$u(x)$ è una funzione da determinare.

Sostituendola nella precedente ed eseguendo le derivate:

$$u'(x) \cdot e^{-A(x)} - a(x)u(x) \cdot e^{-A(x)} + a(x)u(x) \cdot e^{-A(x)} = b(x)$$

Semplificando si ha

$$u'(x) = b(x) \cdot e^{A(x)}$$

$$u(x) = \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt + u_0$$

dove u_0 si può porre uguale a zero.



Nel caso più generale Equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine: formula risolutiva

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

$$y(x) = e^{-\int a(t)dt} \left[c + \int b(s)e^{\int a(\tau)d\tau} ds \right],$$

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} \left[c + \int_{x_0}^x b(s)e^{\int_{x_0}^s a(\tau)d\tau} ds \right],$$

La soluzione dell'equazione differenziale si ottiene sommando alla famiglia di soluzioni dell'equazione omogenea una soluzione particolare. Nel caso in esame la soluzione particolare è data da

$$y_p(x) = e^{-\int a(t)dt} \int b(s)e^{\int a(\tau)d\tau} ds$$

Determinare la soluzione generale di

$$y' + 3y = 6x + 5 \quad y(0) = 3$$

$$y(x) = 2e^{-3x} + 2x + 1$$

Verificare tramite il teorema fondamentale del calcolo integrale che

$$y(x) = e^{-\int \frac{x}{4} dt} \left[2 + \int_{\frac{\pi}{4}}^x \sin(s) e^{\int \frac{s}{4} \tau d\tau} ds \right],$$

è la soluzione di

$$\begin{cases} y' + xy = \sin x \\ y(\frac{\pi}{4}) = 2 \end{cases}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$y'' + ay' + by = g(x).$$

Struttura della soluzione basata sulla linearità

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x)$$

Caso omogeneo

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Esempio

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Polinomio caratteristico associato

Esempio

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2.$$

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = e^{2x}.$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

$$y_1 = e^{-x} \quad y_2 = e^{3x} \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

$$y(0) = c_1 e^{-0} + c_2 e^{3 \cdot 0} = c_1 + c_2$$

$$y'(0) = -c_1 e^{-0} + 3c_2 e^{3 \cdot 0} = -c_1 + 3c_2 = 0.$$

$$c_1 + c_2 = 1 \quad -c_1 + 3c_2 = 0.$$

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$-c_1 + 3c_2 = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \quad c_1 = \frac{3}{4}.$$

$$y = \frac{3}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}e^{3x}$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$y_1 = e^{-2x}$$

$$y_2 = xe^{-2x},$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

Esempio

$$4y'' + y = 0.$$

$$4\lambda^2 + 1 = 0,$$

$$\lambda_1 = \frac{i}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{i}{2}.$$

$$y = c_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Esempio

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5.$$

$$\lambda_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = -1 + 2i.$$

$$\lambda_2 = -1 - 2i.$$

$$y_1 = e^{-x} \cos(2x)$$

$$y_2 = e^{-x} \sin(2x).$$

$$y = c_1 e^{-x} \cos(2x) + c_2 e^{-x} \sin(2x).$$

$$y' = -c_1(e^{-x} \cos(2x) + 2e^{-x} \sin(2x)) + c_2(-e^{-x} \sin(2x) + 2e^{-x} \cos(2x)).$$

$$0 = y(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1$$

$$1 = y'(0) = -c_1 \cdot (0 + 2) + c_2 \cdot (0 + 2) = -2c_1 + 2c_2$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{2}.$$

$$y = \frac{1}{2}e^{-x} \sin(2x)$$

Equazioni del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Si considera il polinomio $P(\lambda)$ detto polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

di cui si determinano le radici

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Si considera il polinomio $P(\lambda)$ detto polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

di cui si determinano le radici

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{R}$ allora $y(x) = e^{\lambda x}$ è soluzione

$$y'(x) = \lambda y(x).$$

Soluzione. Dalla forma algebrica di un numero complesso $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e della formula di Eulero.

$$e^\lambda = e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta),$$

Se $x \in \mathbb{R}$

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)),$$

$$D(e^{(\alpha+i\beta)x}) = D(e^{\alpha x} e^{i\beta x}) = D(e^{\alpha x} \cos(\beta x)) + iD(e^{\alpha x} \sin(\beta x))$$

$$D(e^{\alpha x} \cos \beta x) = e^{\alpha x} (\alpha \cos(\beta x) - \beta \sin(\beta x))$$

$$D(e^{\alpha x} \sin(\beta x)) = e^{\alpha x} (\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x))$$

$$e^{\alpha x} (\alpha \cos(\beta x) - \beta \sin(\beta x)) + i(e^{\alpha x} (\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)))$$

$$(\alpha + i\beta)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + (i\alpha - \beta)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$(\alpha + i\beta)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i(\alpha + i\beta)e^{\alpha x} \sin(\beta x) = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

Equazioni del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti

Polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Si considera il polinomio $P(\lambda)$ detto polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

di cui si determinano le radici λ_1, λ_2

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

- ▶ Se le sue radici sono reali e distinte, ovvero

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

, allora la soluzione è del tipo:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

- ▶ se sono reali e coincidenti, ovvero

$$\lambda_1 = \lambda_2,$$

allora la soluzione è del tipo:

$$y = (c_1 + c_2 \cdot x) e^{\lambda_1 x}$$

- ▶ mentre se sono complesse e coniugate, ovvero $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, allora la soluzione è del tipo:

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C},$$

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x))$$

$$\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \quad \frac{1}{2i}y_1 - \frac{1}{2i}y_2$$

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$$

Supponiamo che y_1 e y_2 siano due soluzioni del problema lineare omogeneo di ordine due. La soluzione di

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

può essere scritta come una combinazione lineare assumendo che

$$W = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) \neq 0.$$

- Radici sono reali e distinte, la soluzione è del tipo:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$W = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x_0} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

- sono reali e coincidenti, la soluzione

$$y = (c_1 + c_2 \cdot x) e^{\lambda_1 x}$$

$$W = e^{2\lambda_1 x_0} (1 + \lambda_1 x_0 - \lambda_1 x_0) \neq 0$$

- mentre se sono complesse e coniugate, ovvero $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, allora la soluzione è del tipo:

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$$

$$W = \dots$$

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

Date due funzioni y_1 e y_2 la Wronskiana è la funzione

$$W(y_1, y_2)(x) := y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

Supponiamo che y_1 e y_2 siano due soluzioni del problema lineare omogeneo di ordine due.

La soluzione di

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

può essere scritta come una combinazione lineare assumendo che la Wronskiana $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$.

$$W'(y_1, y_2) = (y_1 y_2')' - (y_2 y_1')' = \\ y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

$$y_1'' = -p(x)y_1' - q(x)y_1$$

e

$$y_2'' = -p(x)y_2' - q(x)y_2$$

Allora

$$\begin{aligned} W'(y_1, y_2) &= y_1(-p(x)y_2' - q(x)y_2) - y_2(-p(x)y_1' - q(x)y_1) = \\ &\quad -p(x)y_1y_2' + p(x)y_2y_1' \end{aligned}$$

$$W'(y_1, y_2) = -p(x)W(y_1, y_2).$$

$$W(y_1, y_2) = Ce^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}.$$

$$C = W(y_1, y_2)(x_0).$$

$$W(y_1, y_2)(x) = W(y_1, y_2)(x_0)e^{\int_{x_0}^x p(t) dt}.$$

Osserviamo che

$$e^{\int_{x_0}^x p(t) dt} \neq 0$$

Equazioni del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti: alcuni casi

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$$

Ci occuperemo del metodo di somiglianza, ossia dato $g(x)$, cercare una soluzione particolare $y_p(x)$ del tipo g .

- Determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = x^2$$

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata.
- Integrale particolare della forma $Ax^2 + Bx + c$

- Determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y' = x^2 + 1$$

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata.

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{3x}$$

- Integrale particolare della forma $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Se $g(x) = P(x)$, dove $P(x)$ è un polinomio m , si cerca una soluzione particolare del tipo $u(x) = P_1(x)$, dove $P_1(x)$ è un polinomio dello stesso grado m . Se però $\lambda = 0$ è soluzione (semplice) dell'equazione caratteristica associata, allora si deve cercare una soluzione del tipo $u(x) = x \cdot P_1(x)$.

Si consideri $g(x) = P(x) \cdot e^{\alpha x}$, $P(x)$ è un polinomio di grado m .
Se α non è una radice dell'equazione

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

allora si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(x) = P_1(x) \cdot e^{\alpha x}$$

dove P_1 è un polinomio dello stesso m . Se invece α coincide con una delle radici, allora si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(x) = x^r \cdot P_1(x) \cdot e^{\alpha x}$$

r la molteplicità della radice α .

$$y'' - y = e^x$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \dots$$

$$y'' - 2y' - 3y = \sin x$$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{5} \sin x$$

- ▶ Integrale generale dell'equazione omogenea associata.
- ▶ Integrale particolare della forma $A \cos(x) + B \sin(x)$

$$g(x) = A \cos(\beta x),$$

$$f(x) = A \sin(\beta x)$$

o

$$g(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x),$$

con A, B costanti assegnate. In questo caso, se $i\beta$ non risulta una radice dell' equazione

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

allora si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(x) = C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)$$

In caso contrario, si cerca una soluzione del tipo:

$$u(x) = x \cdot (C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x))$$