# ANALISI MATEMATICA I

Paola Loreti

Dipartimento di Scienze di Base, e Applicate per l'Ingegneria, Via Scarpa n.16, 00161 Roma, Italy

# Indice

CAPITOLO 1

# Introduzione

Queste note hanno come protagonista il numero $e$. Pur non tralasciando gli argomenti di base, si è cercato di utilizzare gli argomenti svolti per mettere in luce le molte proprietà del numero $e$. Abbiamo finalizzato le nostre conoscenze via via maggiori per cogliere aspetti di questo numero. Durante il percorso, abbiamo studiato la formula matematica

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

nota come l'identità di Eulero. L' Identità di Eulero è considerata la più bella formula della matematica. In questa formula interagiscono in modo conciso e non banale l'uguaglianza, la moltiplicazione, l'addizione, il numero 1 (elemento neutro della moltiplicazione), il numero 0 (elemento neutro della somma), $\pi$ (rapporto tra la circonferenza e il diametro di un cerchio), $e$ base naturale dei logaritmi, il numero complesso $i$ unità immaginaria ($i^2 = -1$), Per fare ciò studieremo, oltre al numero $e$ le operazioni in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$, i numeri 0,1 e $i$, il numero $\pi$.

Il numero $e$ è la base dei logaritmi naturali, trovati da John Napier.

$$e \approx 2.718281828459045235360287471352 7.....$$

La lettera greca $\pi$, che sta ad indicare la prima lettera greca della parola periphèria (circonferenza) è usata per rappresentare il numero $\pi$. Il suo studio parte dall'antichità, il primo accenno alla rettificazione della circonferenza si trova addirittura nella Bibbia. Il problema della quadratura del cerchio si ritrova nel Papyrus Rhind, attribuito ad Ahmose (circa 2000 a.C., Egitto), in cui vengono individuate due cifre corrette, per arrivare all'opera di Archimede *Misura del cerchio* in cui viene fornita un'approssimazione per difetto e per eccesso, consentendo quindi una precisione accurata del calcolo di $\pi$. Il risultato ottenuto approssimando il cerchio, dall'interno con poligoni regolari inscritti e dall'esterno con poligoni regolari circoscritti. Dopo il lavoro di Archimede altre scoperte sul numero $\pi$ sono dovute a J. H. Lambert che prova nel 1768 l'irrazionalità di $\pi$, e a F. von Lindemann che nel 1882 ne dimostra la trascendenza.

Domanda: Chi è più grande tra $e^\pi$ e $\pi^e$? (Dimostrare)

Riferimento bibliografico: Ivan Niven The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 3, No. 2. (Autumn, 1972), pp. 13-15.

Il testo è stato scritto per gli studenti della Sapienza Università di Roma.

Roma, Agosto 2012

**Primi simboli**

| | |
|---|---|
| $\exists$ | esiste |
| $\forall$ | per ogni |
| $\in$ | appartiene |
| $\cup$ | unione insiemistica |
| $\cap$ | intersezione insiemistica |
| $\emptyset$ | insieme vuoto |
| $\epsilon$ | epsilon |
| $\delta$ | delta |
| $\mathbb{R}$ | l'insieme dei numeri reali |
| $+\infty$ | più infinito |
| $-\infty$ | meno infinito |
| $\mathbb{R}$ | Insieme dei numeri reali |
| $\mathbb{R}_+$ | Insieme dei numeri reali positivi |
| $\mathbb{R}^*$ | Insieme dei numeri reali con l'aggiunta di $-\infty$ e $+\infty$ |
| $\mathbb{C}$ | lnsieme dei numeri complessi |
| $\lim_{n\to+\infty} a_n$ | limite di $a_n$ per $n$ che tende a più infinito |
| $y = \log_a x$ $y$ | il logaritmo in base $a$ di $x$ |
| $\exists!$ | esiste ed è unico |

### 0.1. Costanti fondamentali.

$$e \approx 2.71828182845904523536028747135 27$$

$$\pi \approx 3,14159265358979323846264338327 9$$

Nomi che assoceremo a formule e teoremi: Nepero, Archimede, Weierstrass, De Moivre, Fermat, Leibniz, Newton, Lagrange, Rolle, de l'Hopital, Dirichlet, Riemann.

CAPITOLO 2

# Prime nozioni

## 1. Insiemi

$A$ e $B$ due insiemi di un insieme ambiente $S$. Con $\emptyset$ si denota l'insieme vuoto

$\cup$ unione insiemistica

$$A \cup B = \{x \in A \,\mathrm{o\, x \in B}\}$$

- Per ogni $A$, $B$
$$A \cup B = B \cup A$$
- Per ogni $A$, $B$, $C$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
- $\emptyset$ tale che per ogni $A$ si ha
$$A \cup \emptyset = A$$

$\cap$ intersezione insiemistica

$$A \cap B = \{x \in A \,\mathrm{e\, x \in B}\}$$

- Per ogni $A$, $B$
$$A \cap B = B \cap A$$
- Per ogni $A$, $B$, $C$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
- $\emptyset$ tale che per ogni $A$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Esercizio 1.1. *Sia* $A = \{Marakesh, BuenosAires, St.Petersburg, Kyoto, NewYork, Santiago\}$ *e*
$B = \{Toronto, St.Petersburg, Kyoto, Montreal, Barcelona, Vancouver, Halifax, Bombay\}$ *Trovare* $A \cap B$ *e* $A \cup B$.

Per l'insieme dei numeri naturali si trova in letteratura la notazione
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$
e
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$
oppure
$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.$$

Questa modalità descrive l'insieme tramite gli elementi che lo compongono, non è importante l'ordine in cui gli elementi vengono elencati.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$
perchè ogni numero naturale è anche un intero (non essendo vero il viceversa). L'insieme dei numeri razionali è descritto tramite la proprietà che i suoi elementi devono soddisfare
$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \,\mathrm{con}\, m, n \in \mathbb{Z}, \,\mathrm{con}\, n \neq 0\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$$7 \in \mathbb{N}, \ -1 \in \mathbb{Z}, \ 0.9 \in \mathbb{Q}, \ \frac{7}{9} \in \mathbb{Q}$$
.

Due insiemi $A$ e $B$ sono uguali quando si verifica
$$A = B \iff A \subset B, \, B \subset A$$
.

L'insieme vuoto ha la proprietà di essere contenuto in ogni insieme. Grazie alla definizione precedente (detto principio di doppia inclusione) possiamo dedurre l'unicità di un insieme cosi fatto. Infatti supponiamo che ne esistano due
$$\emptyset, \ \tilde{\emptyset},$$
allora
$$\emptyset \subset \tilde{\emptyset}, \ \ \tilde{\emptyset} \subset \emptyset,$$
ottenendo
$$\emptyset = \tilde{\emptyset}.$$
.

Osservazione 1.
$$A \subset A \cup B$$
$$A \cap B \subset A$$

## 2. Insieme delle parti

. Se l'insieme $A$ ha $N$ elementi, possiamo considerare l'insieme costituito da tutti e e solo i sottoinsiemi di $A$:

$$A = \{1, 2\}$$
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}\}$$

Quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(A)$ se $A$ ha $N$ elementi?

CAPITOLO 3

# Le proprietà dei numeri reali

## 1. Proprietà algebriche

Si indica con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. In $\mathbb{R}$ sono definite le operazioni di *Addizione* e *Moltiplicazione* ed una *relazione d'ordine totale* $\leq$ (minore o uguale) con le seguenti proprietà

(1) Per ogni coppia di numeri reali $a, b$ si ha
$$a + b = b + a$$
**(proprietà commutativa dell'Addizione)**

(2) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
**(proprietà associativa dell'Addizione)**

(3) Esiste ed è unico l'elemento 0 (zero) tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha
$$0 + a = a + 0 = a.$$
**(esistenza dell'elemento neutro rispetto all'Addizione)**

(4) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un unico simmetrico rispetto all'Addizione, detto anche opposto, $-a \in \mathbb{R}$ tale che
$$a + (-a) = 0$$

(5) Per ogni coppia di numeri reali $a, b$ si ha
$$a \cdot b = b \cdot a$$
**(proprietà commutativa della Moltiplicazione)**

(6) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
**(proprietà associativa della Moltiplicazione)**

(7) Esiste ed è unico l'elemento 1 (uno),diverso da 0, tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha
$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$
**(esistenza dell'elemento neutro rispetto alla Moltiplicazione)**

(8) Per ogni $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ esiste un unico simmetrico rispetto alla Moltiplicazione, detto l'inverso o il reciproco di $a$, indicato con $a^{-1}$ o con $1/a$ tale che
$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

(9) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

**(proprietà distributiva della Moltiplicazione rispetto all'Addizione)**

Si indica con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri $1, 2, \ldots,$ Si indica con $\mathbb{Z}$ ( insieme degli interi) l'insieme dei numeri naturali unito con i loro opposti e lo 0. L'insieme $\mathbb{Q}$ è l'insieme delle frazioni di interi. Un generico elemento in $Q$ è del tipo $\frac{m}{n}$, , con $n \neq 0$. Le proprietà algebriche descritte prima in (3) valgono in $\mathbb{Q}$. Come conseguenza dell'operazione di moltiplicazione in $\mathbb{R}$ è definita l'operazione **potenza**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con le proprietà seguenti

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Dato un numero reale $a \geq 0$ esiste ed è univocamente determinato il numero $b$ **radice aritmetica** $n$-esima di $a$ definita come

$$b = a^{1/n} \iff b^n = a$$

Ricordiamo che $+\infty$ e $-\infty$ **non** sono numeri reali.

Esercizio 1.1. *Vale la* legge di cancellazione dell'addizione

$$a + b = a + c \implies b = c$$

$$b = b + 0 = b + a - a = a + b - a = a + c - a = a - a + c = 0 + c = c$$

Esercizio 1.2. *Vale* l'unicità dell'opposto .
*Supponiamo che esistano due opposti* $a + (-a) = 0, \qquad a + \alpha = 0$. *Allora*

$$a + (-a) = a + \alpha$$

*Per la legge di cancellazione dell'addizione si ottiene* $-a = \alpha$.

Esercizio 1.3.

$$\begin{aligned} &[1]\, \forall a \in \mathbb{R}, \qquad a \cdot 0 = 0 \\ &[2]\, \forall a \in \mathbb{R}, \qquad -(-a) = a \\ &[3]\, \forall a \in \mathbb{R}, \qquad (-1) \cdot a = -a \end{aligned}$$

Dimostrazione. [1] $a + a0 = a1 + a0 = a(1 + 0) = a = a + 0$, segue dalla legge di cancellazione dell'addizione.

[2] $a + (-a) = (-a) + a = 0$ $a$ è l'opposto di $-a$, ossia $a = -(-a)$. per l'unicità dell'opposto

[3] $(-1)a + a = [-1 + 1]a = 0a = 0$, quindi $(-1)a$ è l'opposto di $a$. $\square$

ESERCIZIO 1.4. *Per ogni $a$, $b \in \mathbb{R}$*

$$ab = 0 \iff a = 0 \,\text{oppure}\, b = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Se $a = 0 \,\text{oppure}\, b = 0$ si ha $a0 = 0$ per quanto precedentemente dimostrato. Se $ab = 0$ allora se $a = 0$ l'asserto è vero, se $a \neq 0$ allora $\exists a^{-1}$ tale che $aa^{-1} = 1$. Allora

$$b = b1 = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = aba^{-1} = 0a^{-1} = 0,$$

ossia $b = 0$. □

## 2. Ordinamento

La relazione $\leq$ è di ordine totale in $\mathbb{R}$ ossia, comunque si considerino due numeri reali $a, b$ necessariamente deve aversi $a \leq b$ oppure $b \leq a$ e sono vere entrambe se e solo se $a = b$.
Inoltre tale relazione $\leq$ è compatibile con le operazioni nel senso precisato dalle proprietà : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c$$
$$0 \leq a \text{ e } 0 \leq b \Longrightarrow 0 \leq a + b, \quad 0 \leq a \cdot b$$

Notazione: $a < b \Longleftrightarrow a \leq b$ e $a \neq b$
Per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ vale una ed una sola delle seguenti relazioni

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

Ricordiamo che una disequazione può essere portata a una disequazione equivalente (ossia che ammette le stesse soluzioni)

- aggiungendo al primo e secondo membro uno stesso numero reale senza toccare il verso della disuguaglianza.
- moltiplicando primo e secondo membro per uno stesso numero reale **positivo** (i.e. $> 0$) senza toccare il verso della disuguaglianza.
- moltiplicando primo e secondo membro per uno stesso numero reale **negativo** (i.e. $< 0$) **cambiando** il verso della disuguaglianza

## 3. I numeri irrazionali

Ci sono numeri reali che non appartengono all'insieme $\mathbb{Q}$. Sono i numeri irrazionali. Un numero irrazionale è quindi un numero reale che non può essere scritto come una frazione $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, con $n \neq 0$. Alcuni numeri irrazionali sono numeri irrazionali algebrici come la radice quadrata di due e gli irrazionali algebrici sono radici di equazioni algebriche a coefficienti interi (esempio la la radice quadrata di due è soluzione di $x^2 - 2 = 0$), altri sono numeri irrazionali trascendenti come $e$,$\pi$ e gli irrazionali trascendenti non sono radici di equazioni algebriche a coefficienti interi. I numeri trascendenti furono per la prima volta distinti dagli irrazionali algebrici da Kronecker.

LEMMA 3.1. *Se $m^2$ pari, $m$ è pari*

DIMOSTRAZIONE. Se $m$ fosse dispari $m = 2k+1$, allora $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 3k + 1$ risulterebbe dispari contro l'ipotesi. □

PROPOSIZIONE 1. *Il numero $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale. Allora esistono due interi $m$ e $n$ privi di fattori comuni eccetto l'unità, tali che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ . Elevando al quadrato si ha

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad m^2 = 2n^2$$

Questo implica che $m^2$ pari, e che quindi $m$ è pari, ossia esiste $k$ intero tale che $m = 2k$. Sostituendo a $m^2 = 2n^2$abbiamo che anche $n$ è pari, e quindi $m$ e $n$ hanno in comune un fattore 2, il che impossibile perchè abbiamo assunto $m$ e $n$ privi di fattori comuni. Abbiamo ottenuto una contraddizione con l'ipotesi. □

I numeri reali possono essere pensati come punti su una retta. I numeri corrispondenti agli interi sono ugualmente spaziati. La distanza tra due interi consecutivi è pari a 1. La distanza tra due numeri naturali pari consecutivi è pari a 2. La distanza tra due reali consecutivi $x_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ come si comporta asintoticamente per $n$ grande?

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

(diventa sempre più piccolo).

La distanza tra due naturali consecutivi $x_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ come si comporta asintoticamente per $n$ grande?

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

(diventa sempre più grande)

La distanza tra due reali consecutivi $x_n = \sqrt{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$ come si comporta asintoticamente per $n$ grande?

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{(n+1)^2 + 1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{2n}{\sqrt{(n+1)^2 + 1} + \sqrt{n^2+1}}$$

Osserviamo

$$\sqrt{(n+1)^2 + 1} = \sqrt{n^2(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})} = n\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

$$\sqrt{n^2+1} = \sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$\sqrt{(n+1)^2 + 1} + \sqrt{n^2+1} = n[\sqrt{(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}] \approx 2n$$

In definitiva

$$\sqrt{(n+1)^2 + 1} - \sqrt{n^2+1} \approx 1$$

OSSERVAZIONE 2. *Riflettiamo sulla dimostrazione*

$$x \in \mathbb{Q}, \iff \exists m, n \in \mathbb{Z}\, x = \frac{m}{n}, \ n \neq 0$$

*Cosa vuol dire negare $x \in \mathbb{Q}$?*

$$x \notin \mathbb{Q}, \iff \forall m, n \in \mathbb{Z}\, x \neq \frac{m}{n}, \ n \neq 0$$

## 4. Minimo e massimo tra due numeri reali

Ricordiamo che l'operazione $\min\{a, b\}$ ̀definisce il più piccolo numero tra $a$ e $b$, ossia

$$\min\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{se } a \leq b \\ b. & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'operazione $\max\{a, b\}$ ̀definisce il più più grande numero tra $a$ e $b$, mentre

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq b \\ b. & \text{altrimenti} \end{cases}$$

### 4.1. Gli intervalli di $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R}\ a \leq x \leq b\} \\ (a, b) &= \{x \in \mathbb{R}\ a < x < b\} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R}\ a < x \leq b\} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R}\ a \leq x < b\} \end{aligned}$$

## 5. Topologia in $\mathbb{R}$

Un intorno di un punto $x_0$ si scrive

$$I(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : -x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\},$$

$\delta > 0$ rappresenta la semiampiezza dell'intorno.

Definizione 5.1. *Un punto $x_0$ è punto di accumulazione per l'insieme $X$ se in un qualsiasi intorno del punto $x_0$ cade almeno un punto appartenente all'insieme $I$ diverso da $x_0$.*

Esercizio 5.2. *Mostrare che $x = 0$ è un punto di accumulazione per*

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}\ \ n \in \mathbb{N}\}$$

In generale tratteremo insiemi semplici di $\mathbb{R}$ come semplici unione e semplici interserzioni di intervalli. Occorre tener presente che i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ possono avere proprietà piu' complicate. (vedere la sezione (2)).

## 6. Il simbolo di somma e prodotto

La sommatoria è un simbolo matematico che indica la somma di un certo insieme di numeri. Si usa la lettera $\sum$. Si deve indicare l'intervallo di valori dove la somma ha luogo ossia il valore inferiore e superiore dell'indice della somma; alla destra del simbolo $\sum$ vi e' un' espressione algebrica che in generale dipende dall'indice di sommatoria. Sia $k_0 \leq k \leq k_1$ allora

$$a_{k_0} + \cdots + a_{k_1} = \sum_{k=k_0}^{k_1} a_k.$$

Fissiamo $k_0 = 1, k_1 = N$. Si ha

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

Valgono le seguenti regole

-
$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{j=1}^{N} a_j$$

-
$$\sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=1}^{N} b_k = \sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k)$$
$$\sum_{k=1}^{N} c a_k = c \sum_{k=1}^{N} a_k, \qquad c \in \mathbb{R}$$

- Per $1 \leq J \leq N$
$$\sum_{k=1}^{J} a_k + \sum_{k=J+1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

- Per $p \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{K=p+1}^{N+p} a_{K-p}$$

-
$$\sum_{k=1}^{N} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{N \text{ volte}} = N$$

Esercizio 6.1. *Vero o falso*
$$\sum_{k=1}^{N} a_{k-1} = \sum_{k=2}^{N+1} a_k$$

*Vero o falso*
$$\sum_{k=1}^{N} a_{k-1} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k$$

*Vero o falso*
$$\sum_{k=1}^{N} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

La produttoria è un simbolo matematico che indica il prodotto di un certo insieme di numeri. Si usa la lettera $\prod$. Si deve indicare l'intervallo di valori dove la produttoria ha luogo ossia il valore inferiore e superiore dell'indice della produttoria; alla destra del simbolo $\prod$ vi è un'espressione algebrica che in generale dipende dall'indice di produttoria
$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_N = \prod_{k=1}^{N} a_k$$

## 7. Altri esempi di strutture

Consideriamo $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con le operazioni

$$\oplus := \min, \qquad \odot := +$$

dove

$$\mathbf{0} = +\infty, \qquad \mathbf{1} = 0.$$

Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}_{\min}$

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c); \qquad (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c);$$

$$a \oplus b = b \oplus a; \qquad a \odot b = b \odot a$$
$$\mathbf{0} \oplus a = a \oplus \mathbf{0} = a; \qquad \mathbf{1} \odot a = a \odot \mathbf{1} = a;$$

$$a \oplus \mathbf{0} = a; \quad a \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c).$$

Vale la proprietà di idempotenza

$$a \oplus a = a.$$

Tabella 1. Tabellina $\oplus$

| $\oplus$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **2** | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| **3** | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **4** | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| **5** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| **6** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| **7** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 |
| **8** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 |
| **9** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Tabella 2. Tabellina $\odot$

| $\odot$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **2** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **3** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| **4** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **5** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| **6** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| **7** | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| **8** | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| **9** | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Verificare che nella struttura $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con l' operazione

$$\oplus := \min$$

vale il cosidetto **freshman's dream**

$$(a \oplus b)^3 = a^3 \oplus b^3$$

## 8. Parte intera

Possiamo considerare l'applicazione $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ che associa la parte intera,

$$\lfloor x \rfloor = \text{il più grande intero } \leq x,$$

e la parte intera superiore

$$\lceil x \rceil = \text{ il più piccolo intero } \geq x$$

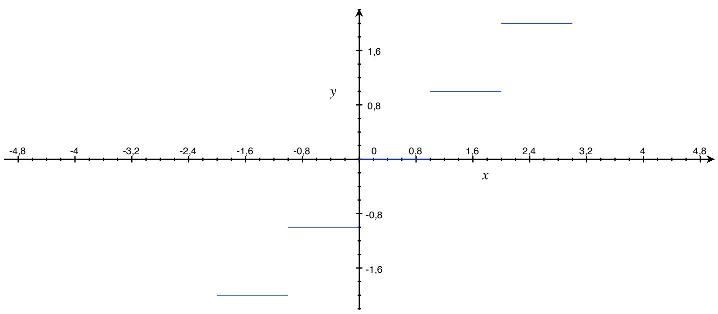
Valori di $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$

$$\lfloor 0 \rfloor = 0 \quad \lfloor 1/2 \rfloor = 0 \quad \lfloor -3.7 \rfloor = -4$$

$$\lceil 0 \rceil = 0 \quad \lceil 1/2 \rceil = 1 \quad \lceil -3.7 \rceil = -3$$

Valgono le proprietà

- $$\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor \text{ idempotenza}$$
- $$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor \ \forall x \in \mathbb{R}$$
- $$\lceil k/2 \rceil + \lfloor k/2 \rfloor = k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$




Esercizio 8.1. *Stabilire se si tratta del grafico di $\lceil x \rceil$ o $\lfloor x \rfloor$. Disegnare il grafico mancante.*

**8.1. La mantissa di $x$.** Dato $x \in \mathbb{R}$

$$x = \lfloor x \rfloor + \underbrace{(x - \lfloor x \rfloor)}_{\text{mantissa}},$$

ossia $x$ è la somma della sua parte intera e della parte decimale. Disegnare il grafico di

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor$$

Osservazione 3. *Ricordare, nelle operazioni consuete,*

$$(a+b)^2,\ (a-b)^2, (a+b)^3,\ (a-b)^3,\ (a^3-b^3),\ (a^3+b^3)$$

## 9. Minimo e massimo di un insieme di numeri reali

Dato un insieme $X$ di numeri reali un numero reale $m$ è un minorante per $X$ se

$$\forall x \in X \ \ x \geq m.$$

Se l'insieme $X$ ha un minorante, $X$ si dice inferiormente limitato.
Dato un insieme $X$ di numeri reali un numero reale $M$ è un maggiorante per $X$ se

$$\forall x \in X \ \ x \leq M.$$

Se l'insieme $X$ ha un maggiorante, $X$ si dice superiormente limitato.
Un insieme inferiormente e superiormente limitato si dice limitato.

Esempio 9.1.

- *L'insieme*

$$X = \{x = (-1)^n, \ n \in \mathbb{N}\}$$

*è inferiormente e superiormente limitato. L'insieme dei minoranti è dato da*

$$X_m = \{x \in \mathbb{R}, \ x \leq -1\}$$

*L'insieme dei maggioranti è dato da*

$$X_M = \{x \in \mathbb{R}, \ x \geq 1\}.$$

- *$X$ può essere non limitato sia superiormente che inferiormente*

$$X = \{x = (-1)^n n, \ n \in \mathbb{N}\}$$

- *$X$ può essere non limitato superiormente*

$$X = \{x = n, \ \ n \in \mathbb{N}\}$$

*L'insieme dei minoranti è dato da*

$$X_m = \{x \in \mathbb{R}, \ x \leq 1\}$$

- *$X$ può essere non limitato inferiormente*

$$X = \{x = -n, \ \ n \in \mathbb{N}\}$$

*L'insieme dei maggioranti è dato da*

$$X_M = \{x \in \mathbb{R}, \ x \geq -1\}.$$

Se il numero più grande dei minoranti appartiene all'insieme, tale numero è il minimo dell'insieme.Se il numero più piccolo dei maggioranti appartiene all'insieme,tale numero è il massimo dell'insieme. L'insieme

$$X = \{x = (-1)^n, \ n \in \mathbb{N}\}$$

ha come insieme dei minoranti

$$X_m = \{x \in \mathbb{R}, \ x \leq -1\},$$

il cui massimo è è $-1$ (minimo dell'insieme $X$), mentre l'insieme dei maggioranti è dato da

$$X_M = \{x \in \mathbb{R}, \ x \geq 1\},$$

il cui minimo è 1 (massimo dell'insieme $X$). Se esistono, il minimo e il massimo o appartengono all'insieme: puo' accadere che l'insieme non ammetta massimo o minimo. Ad esempio

$$X = \{x = \frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N}\},$$

non ammette minimo. L'insieme dei minoranti

$$X_m = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\},$$

ammette però massimo. Il numero 0 non è il minimo di $X$. È l'estremo inferiore dell'insieme $X$. Analogamente

$$X = \{x = -\frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N}\},$$

non ammette massimo. L'insieme dei maggioranti

$$X_M = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\},$$

ammette però minimo. Il numero 0 non è il massimo di $X$. È l'estremo superiore dell'insieme $X$.

$M$ é l'estremo superiore dell'insieme $X$ ossia $M$ è il minimo dei maggioranti dell'insieme $X$.

$m$ é l'estremo inferiore dell'insieme $X$ ossia $m$ è il massimo dei minoranti dell'insieme $X$.

PROPOSIZIONE 2. *Non esiste $c \in Q$ elemento separatore degli insiemi*

$$Y = \{q \in \mathbb{Q}\ q > 0, q^2 > 2\}$$
$$X = \{q \in \mathbb{Q}\ q < 0\} \cup \{q \geq 0,\ q^2 \leq 2\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dovrà risultare

$$x \leq c \leq y,\ \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Se $c \in X$, sia $c > 0$ allora $c^2 \neq 2$ (per quanto precedentemente dimostrato), e dovrà risultare $c^2 < 2$.

Si ha per $N \in \mathbb{N}$ e

$$N > \frac{2c+1}{2-c^2},$$

allora

$$c + \frac{1}{N} \in X.$$

Infatti $c + \frac{1}{N} \in \mathbb{Q}$ e

$$\big(c + \frac{1}{N}\big)^2 = c^2 + \frac{1}{N^2} + \frac{2c}{N} < 2.$$

Abbiamo trovato un elemento di $X$ maggiore di $c$, contro l'ipotesi

$$x \leq c,\ \forall x \in X$$

□

ESERCIZIO 9.2. *Svolgere il caso $c \in Y$.*

## 10. Assioma di completezza

Siano $A$ e $B$ due insiemi non vuoti di numeri reali con $a \leq b\ \forall a \in A,\ \forall b \in B$. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b\ \forall a \in A,\ \forall b \in B$

TEOREMA 10.1. *Ogni insieme $X$ di numeri reali che non sia vuoto e che sia limitato superiormente possiede un estremo superiore.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $Y$ l'insieme dei maggioranti di $X$. $Y \neq \emptyset$. Applichiamo l'assioma di completezza. Esiste $M$ reale tale che

$$x \leq M \leq y,\ \forall x \in X, \forall y \in Y$$

M è un maggiorante di $X$ ossia $M \in Y$, ed è minore di tutti gli elementi di $Y$. Quindi $M$ è il minimo dei maggioranti. □

Analogamente

TEOREMA 10.2. *Ogni insieme $X$ di numeri reali che sia non vuoto e inferiormente limitato possiede un estremo inferiore.*

Per ogni insieme numerico $X$ non limitato superiormente si pone

$$\sup X = +\infty$$

Tali insiemi sono caratterizzati dalla proprietà seguente

$$\forall M \in \mathbf{R}, \quad \exists x_1 \in X \text{ t.c. } x_1 > M.$$

In modo analogo, se $X$ non è limitato inferiormente allora non ha minoranti. Cioè, comunque si consideri un numero reale $m$, esiste un elemento in $X$ minore di $m$.

Per ogni insieme numerico $X$ non limitato inferiormente si pone

$$\inf X = -\infty$$

Tali insiemi sono caratterizzati dalla proprietà

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists x_2 \in X \text{ t.c. } x_2 < m.$$

## 11. Esercizi

ESERCIZIO 11.1. *Dimostrare*

$$\begin{aligned}
&\forall a, b \in \mathbb{R}, && -(a+b) = (-a) + (-b)\\
&\forall a, b \in \mathbb{R}, && (-a) \cdot b = -(a \cdot b)\\
&\forall a, b \in \mathbb{R}, && (-a) \cdot (-b) = a \cdot b\\
&\forall a, b \in \mathbb{R}, && a \cdot b = 0 \ \textit{e}\ a \neq 0 \Longrightarrow b = 0\\
&\forall a, b \in \mathbb{R}, && a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \ \textit{oppure}\ b = 0
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 11.2. *Vero o falso*

| | |
|---|---|
| $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $\sqrt{a^2} = a\ \forall a \in \mathbb{R}$ | $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $-1 \in \mathbb{N}$ |
| $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $\pi \in \mathbb{Q}$ | $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $[0,5] \subset [1,6]$ |

ESERCIZIO 11.3. *Quale è vera?*

$\boxed{a}$ $\sqrt{a} = a$ *non ammette soluzione in* $\mathbb{R}$ $\boxed{b}$ $a^2 = b^2 \iff a = b$

$\boxed{c}$ $0,\overline{3} \in \mathbb{Q}$ $\boxed{d}$ *un numero naturale è anche razionale*

ESERCIZIO 11.4. *Quale è vera?*

$\boxed{a}$ $\max\{a, b\} > \min\{a, b\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$\boxed{b}$ $\max\{a, b\} \geq \min\{a, b\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$\boxed{c}$ *un numero reale al quadrato è sempre* $> 0$.

CAPITOLO 4

# Esempi di funzioni

Dati due insiemi di numeri reali $X$ e $Y$, $f$ è una relazione che a ogni $x \in X$ ($X$=Dom($f$) dominio di $f$) fa corrispondere un unico $y = f(x) \in Y$.

$$f : X \to Y,$$

$Im(f)$ Ì'insieme dei punti $y \in Y$, ottenuti come $y = f(x)$.

$$Im(f) = \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\}$$

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

La funzione si dice *suriettiva* se $Im(f) = Y$ e *iniettiva* se

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ si ha } x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

È importante associare alla funzione

- $X$ l' insieme di definizione
- $Im(f)$ il codominio
- Il grafico

Osservazione 4. *Osserviamo che se $im(f)$ viene sostituito con un insieme più ampio, sostanzialmente la funzione non cambia. Talvolta il codominio viene lasciato imprecisato.*

Esercizio 0.5. *Calcolare dominio, codominio e disegnare $f(x) = |x|$, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Calcolare dominio, codomio e disegnare $f(x) = \max\{-|x|, x\}$, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Calcolare dominio, codomio e disegnare $f(x) = \max\{|x|, -x\}$, al variare di $x \in \mathbb{R}$.*

- Traslazioni in $x$. $y = f(x + k), k \in \mathbb{R}$, il grafico subisce una traslazione orizzontale, verso sinistra se $k > 0$, verso destra se $k < 0$.
- Traslazioni in $y$. $y = k + f(x), k \in \mathbb{R}$, il grafico subisce una traslazione verticale, verso l'alto se $k > 0$, verso il basso se $k < 0$.

## 1. Funzione composta

$f : X \to Y$, $g : Z \to W$ e supponiamo $Y \subset Z$. Per ogni $x \in X$, si ha $f(x) \in Y \subset Z$,

$g \circ f(x) = g(f(x)) = w \in W$.

$g \circ f$ si dice funzione composta mediante $f$ e $g$. L'operazione di composizione non è commutativa, ed è generalmente diverso $f \circ g$ da $g \circ f$.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = x + 1$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2 \in \mathbb{N}$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2 + 2x \in \mathbb{N}$$

## 2. Funzione inversa

Sia $f : X \to Y$ iniettiva. Resta definita la funzione

$$f^{-1} : f(X) \to X$$

$$\forall y \in f(X),\ f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Come esempio consideriamo la funzione

$$f(x) = x + 3,\ \ x \in \mathbb{Z}$$

La funzione è iniettiva in $\mathbb{Z}$, e $Im(f) = \mathbb{Z}$. Quindi

$$f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$\forall y \in \mathbb{Z},\ f^{-1}y = x \iff f(x) = y$$

ossia

$$\forall y \in \mathbb{Z},\ x + 3 = y \,\text{i.e.}\, x = y - 3$$

e

$$f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ \ f^{-1}(y) = y - 3.$$

## 3. Funzione finestra

Una funzione finestra  una funzione $f : \mathbb{R} \to Y$, a supporto compatto: vale zero al di fuori di un intervallo $[a, b]$ e 1 nei punti dell'intervallo $[a, b]$. Osserviamo che $Im(f) = \{0, 1\}$.

- Esempio di funzione finestra.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{in [0,1]} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Serve per localizzare una funzione: si moltiplica la funzione per la funzione finestra. In generale l'operazione rende la funzione risultante meno regolare.

$$g(x) = x^2 f(x)$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{in [0,1]} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel punto $x = 1$ la funzione ha un salto verso il basso.

Consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{in [-1,1]} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## 4. Le funzioni trigonometriche

Sia $2\pi$ la lunghezza della circonferenza di raggio 1. Al generico punto $P$ appartenente alla circonferenza viene associato $(\cos x, \sin x)$, con le proprietà:

- $$|\cos x| \le 1, \qquad |\sin x| \le 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
- $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
- $$\sin x = -\sin(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
- $$\cos x = \cos(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
- $$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$
- $$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$
- $$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$
- $$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$$

Dalla relazione $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, si osservi che le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ non si annullano mai contemporaneamente, pertanto non esistono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

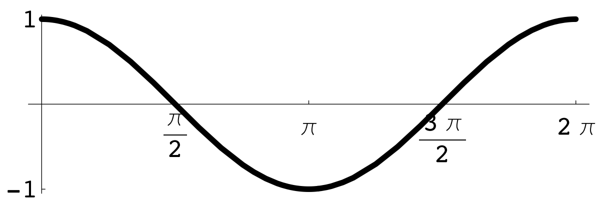



FIGURA 1. Grafico di $f(x) = \cos x$

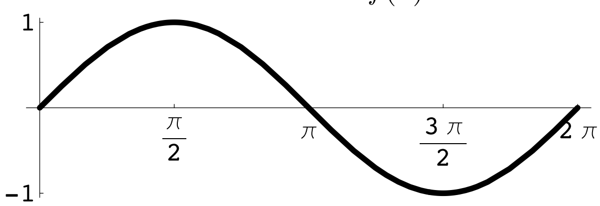



FIGURA 2. Grafico di $f(x) = \sin x$

Moltiplicando per una costante reale positiva $n$ l'argomento di una funzione trigonometrica, ossia considerando la funzione $f(nx)$, si determina una variazione del periodo da $T$ a $\frac{T}{n}$.

FIGURA 3. Grafico di $f(x) = \sin x$ $f(x) = \sin 2x$ $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$

## 5. Il modulo di $x$

Dato $x \in \mathbb{R}$ il modulo di $x$ è definito

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

Vale per $x, y \in \mathbb{R}$

- $|x| \geq 0$
- $x \neq 0$ se e solo se $|x| > 0$
- $|x| = |-x|$
- -$|x| \leq x \leq |x|$
- $|x| \leq r$ se e solo se $-r \leq x \leq r$ $r$ reale positivo.
- $|x| < r$ se e solo se $-r < x < r$, $r$ reale positivo.
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$
- $|x| = |y|$ se e solo se $x^2 = y^2$,
  $|x| < |y|$ se e solo se $x^2 < y^2$.

ESERCIZIO 5.1. *Dati $N$ numeri reali $a_k$, $k \in \mathbb{N}$, dimostrare*

$$|\sum_{k=1}^{N} a_k| \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k|$$

## 6. Funzione potenze, radici e esponenziali

La potenza di $x$. Per $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$ consideriamo

$$f(x) = x^n,$$
$$g(x) = n^x,$$
$$h(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

e distinguiamo il caso $n$ pari e $n$ dispari. Per $n$ pari, ad esempio $n = 2$

$$f(x) = x^2,$$
$$g(x) = x^{\frac{1}{2}},$$
$$h(x) = 2^x$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$,
$\mathrm{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ $\mathrm{Im}(g) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, $\mathrm{Im}(h) = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.
Per $n$ dispari, ad esempio $n = 3$

$$f(x) = x^3,$$
$$g(x) = x^{\frac{1}{3}},$$
$$h(x) = 3^x$$

Dom $(f) = \mathbb{R}$, Dom$(g) = \mathbb{R}$, Dom$(h) = \mathbb{R}$
Im$(f) = \mathbb{R}$, Im$(g) = \mathbb{R}$, Im$(h) = \mathbb{R}_+$

## 7. La funzione esponenziale

Al variare di $x \in \mathbb{R}$ consideriamo per $a > 1$

$$f(x) = a^x$$

Si dice logaritmo in base a di un numero $x$ l'esponente da dare ad $a$ per ottenere $x$.

$$x = a^y \iff y = \log_a x$$

(si legge: $y$ il logaritmo in base $a$ di $x$). Pensiamo al caso paricolare

$$f(x) = 2^x$$

## 8. Logaritmi e proprietà dei logaritmi in base 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, , il logaritmo in base 2 ha la proprietà

$$2^{\log_2 x} = x.$$

Si ha

$$\log_2 1 = 0.$$

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$, vale

- $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$. Perchè
$$\log_2 xy = \log_2(2^{\log_2 x}2^{\log_2 y}) = \log_2(2^{\log_2 x + \log_2 y}) = \log_2 x + \log_2 y$$
- $\log_2 \frac{1}{x} = -\log_2 x$. Perchè
$$0 = \log_2 1 = \log_2(xx^{-1}) = \log_2 x + \log_2 x^{-1},$$
$$-\log_2 x = \log_2 x^{-1}$$
- $\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 x - \log_2 y$.
$$\log_2 \frac{x}{y} = \log_2(x\frac{1}{y}) = \log_2 x + \log_2 \frac{1}{y} = \log_2 x - \log_2 y$$
- Per $n \in \mathbb{N}$ , $\log_2 x^n = n \log_2 x$. Perchè
$$\log_2 x^n = \log_2 \underbrace{x \cdot x \dots x}_{\text{n volte}} = \log_2 x + \log_2 x + \dots \log_2 x = n \log_2 x$$
- Per ogni $x \neq 0, \log_2 x^2 = 2 \log |x|$ Perchè se $x > 0$
$$\log_2 x^2 = \log_2 xx = \log_2 x + \log_2 x = 2 \log_2 x,$$
se $x < 0$ allora $-x > 0$
$$\log_2 x^2 = \log_2(-x)(-x) = \log_2(-x) + \log_2(-x) = 2 \log_2(-x),$$
ossia $x \neq 0, \log_2 x^2 = 2 \log |x|$
- per ogni $x, y$ con $xy > 0$,
$\log xy = \log |x| + \log |y|$. Perchè se $x > 0$ $y > 0$ allora
$$\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y,$$
se $x < 0$ $y < 0$ allora
$$\log_2 xy = \log_2(-x)(-y) = \log_2(-x) + \log_2(-y)$$

## 9. Funzioni trigonometriche inverse

**9.1. Grafici di funzioni trigonometriche inverse.** La funzione $f(x) = \sin(x), x \in \mathbb{R}$ non è invertibile in $\mathbb{R}$. Possiamo renderla invertibile se limitiamo il suo dominio all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, in cui la funzione è monotona. La sua inversa è la funzione $f(x) = \arcsin(x)$.

La sua inversa $f(x) = \arcsin(x)$ è definita in $[-1, 1]$ a valori in $[-\pi/2, \pi/2]$

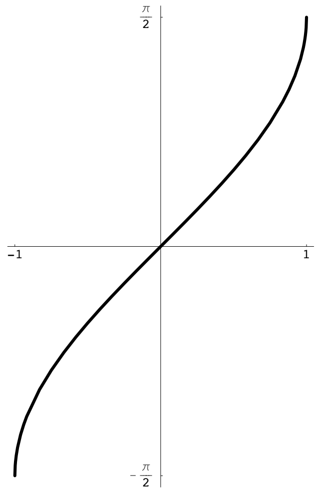



FIGURA 4. Grafico di $f(x) = \arcsin(x)$.

La funzione $f(x) = \cos(x), x \in \mathbb{R}$ non è invertibile in $\mathbb{R}$. Possiamo renderla invertibile se limitiamo il suo dominio all'intervallo $[0, \pi]$, in cui la funzione è monotona. La sua inversa è la funzione $f(x) = \arccos(x)$. La sua inversa $f(x) = \arccos(x)$ è definita in $[-1, 1]$ a valori in $[0, \pi]$.

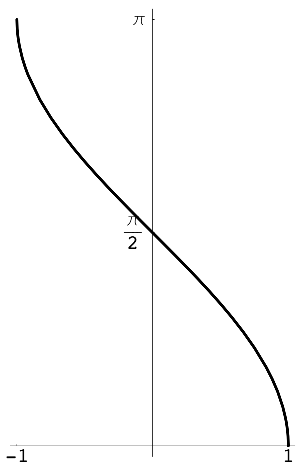



FIGURA 5. Grafico di $f(x) = \arccos(x)$.

La funzione

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, è periodica di periodo $\pi$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta.$$

È una funzione dispari

$$\tan(-x) = -\tan x$$

ed è ovunque crescente.

Per alcuni angoli noti

$$\tan 0 = 0 \quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1 \quad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Se restringiamo lo studio della funzione tangente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, utilizzando la stessa notazione per indicare la funzione in tale intervallo la funzione risulta iniettiva e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ La funzione tangente è invertibile: la funzione inversa è indicata con

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

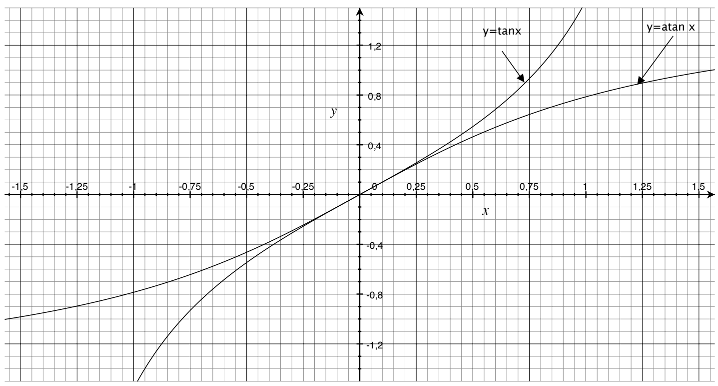



FIGURA 6. Grafico di $f(x) = \tan(x)$, grafico di $f(x) = \arctan(x)$

Risolvere

$$\begin{cases} \tan s = t \\ s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \cup (-\pi, \pi) = (-\pi, \pi] - \{\pm\frac{\pi}{2}\} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \tan s = t \\ s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

  Sia

  $$-\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2},$$

  allora

  $$t = \tan s \quad \text{se e solo se } s = \arctan t$$

- $$\begin{cases} \tan s = t \\ s \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

  Sia $\frac{\pi}{2} < s \leq \pi$, allora

  $$s - \pi = s^\star \quad \text{tale che } s^\star \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$$

Poichè
$$\tan s = \tan(\pi + s^\star) = \tan s^\star$$
;
$$t = \tan s = \tan s^\star$$
e
$$s^\star = \arctan t \quad \text{ossia} \quad s - \pi = \arctan t.$$
In conclusione
$$s = \pi + \arctan t$$
Sia
$$-\pi < s < -\frac{\pi}{2},$$
poniamo
$$s + \pi = s^\star \text{ in modo tale che } \quad s^\star \in (0, \frac{\pi}{2}]$$
Sappiamo che
$$\tan s = \tan s^\star$$

$$t = \tan s \quad \text{ossia} \quad t = \tan s^\star$$

$$s^\star = \arctan t$$
$$s + \pi = \arctan t.$$
In conclusione
$$s = -\pi + \arctan t$$
Quindi l'unica soluzione $s$ è data da
$$s = \begin{cases} \arctan t & t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \pi + \arctan t, & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ -\pi + \arctan t, t \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

## 10. Esercizi

Esercizio 10.1. *Disegnare* $y = |x-5|, y = |x+3|, y = |x| - 7, y = |x| + 8$.. *Disegnare* $y = \sin|x|, y = |\sin x|, y = \sin(x+c), y = \sin x + c$. *Disegnare* $y = \cos|x|, y = |\cos x|, y = \cos(x+c), y = \cos x + c$

CAPITOLO 5

# Il principio di Induzione

In *Arithmetices principia* Peano introduce i numeri naturali $\mathbb{N}$ dando le seguenti regole

- 1 è un numero $\in \mathbb{N}$,
- Il successivo di un numero $\in \mathbb{N}$ è un numero $\in \mathbb{N}$,
- 1 non è successivo di nessun numero $\in \mathbb{N}$,
- se i successivi di due numeri $\in \mathbb{N}$ sono uguali, anche i due numeri sono uguali,
- Se un insieme $A$ contiene il numero 1 e il successivo di ogni suo elemento, allora $A = \mathbb{N}$,

Gli assiomi riguardano l' operazione del passaggio da un numero naturale al suo successivo, l'ultimo dei quali particolarmente importante nel definire le operazioni in $\mathbb{N}$. Esso è il principio di induzione. Data una proposizione $\mathcal{P}(n)$, con $\mathcal{P}(1)$ vera se **dall'assumere** $\mathcal{P}(n)$ **vera** (ipotesi induttiva), risulterà $\mathcal{P}(n+1)$ vera, allora la proposizione sarà vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

0.0.1. *La somma dei primi n numeri naturali e la somma dei loro quadrati.*

Proposizione 3.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dimostare come esercizio

## 1. La disuguaglianza di Bernoulli e altri casi

Spesso alla base di dimostrazioni di teoremi, la disuguaglianza di Bernoulli asserisce che

Proposizione 4.

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x \geq -1.$$

Dimostrazione. La disuguaglianza è verificata per $n = 1$. **Assumendo vera la disuguaglianza** *al passo* $n$ si ha

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \geq 1 + (n+1)x.$$

□

Esercizio 1.1. *Dimostrare al variare di* $x \in \mathbb{R}$

$$|x^n| = |x|^n, \ n \in \mathbb{N}$$

1.0.2. *Disuguglianze.* Introduciamo il simbolo ! (fattoriale di $n$): è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ che agisce cos`ì

$$1! = 1, \qquad n! = n(n-1)!$$

Esempio :

$$5! = 5(4!) = 54(3!) = 543(2!) = 54321 = 120$$

Dimostriamo tramite il principio di induzione

$$n! \geq 2^{n-1}, \qquad \forall n \geq 1, n \in N$$

Dimostrazione. Per $n = 1$ è verificata. **Assumendo vera la disuguaglianza** *al passo* $n$ , si ha

$$(n+1)! = n!(n+1) \geq 2^{n-1}2 = 2^n$$

□

Dimostriamo tramite il principio di induzione

$$2^n > n, \qquad \forall n \geq 1, n \in N$$

Dimostrazione. Per $n = 1$ è verificata. **Assumendo vera la disuguaglianza** *al passo* $n$ , si ha

$$2^{n+1} = 2^n 2 > 2n \geq n + 1.$$

□

Sia $a \geq 1$. Dimostrare che

$$\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione. Prendendo $x = \frac{a-1}{n}$, applichiamo la disuguaglianza di Bernoulli

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq a,$$

passando alla radice $n$esima si ha il risultato. □

1.0.3. *Un altro caso.*

Proposizione 5. *Se il prodotto di $n$ numeri reali e positivi è uguale ad* 1*, la loro somma risulta $\geq$ di $n$.*

Dimostrazione. Il risultato è vero per $n = 1$.
Supponiamo che $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ e dimostriamo che se

$$x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} = 1,$$

allora

$$x_1 + x_2 \cdots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1.$$

Se

$$x_1 x_2 + \cdots + x_n x_{n+1} = 1,$$

allora

- tutti i fattori sono uguali. Quindi sono tutti uguali ad 1 e la loro somma vale $n + 1$, e il risultato è dimostrato.
  Se non,

- Esisterà almeno un fattore più piccolo di 1 ed un fattore più grande di 1.

Supponiamo
$$x_1 < 1, \qquad x_{n+1} > 1.$$
Poniamo
$$y_1 = x_1 x_{n+1},$$
abbiamo
$$y_1 x_2 \cdots x_n = 1,$$
possiamo dunque applicare il risultato assunto vero al passo $n$, ne segue
$$y_1 + x_2 \cdots + x_n \geq n,$$
ma
$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \cdots x_n + x_{n+1} = (y_1 + x_2 \cdots x_n) + x_{n+1} - y_1 + x_1 \geq \\ n + 1 + x_{n+1} - y_1 + x_1 - 1 = n + 1 + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 - 1 = \\ n + 1 + (x_{n+1} - 1)(1 - x_1) \end{gathered}$$
Poichè
$$(x_{n+1} - 1)(1 - x_1) \geq 0,$$
il risultato è dimostrato al passo $n + 1$. □

## 2. Medie

TEOREMA 2.1. *Siano dati $x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_n$, non negativi, $n \in \mathbb{N}$. La media geometrica $M_g$ è il numero*
$$M_g := (x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$
*La media aritmetica $M_a$ è il numero*
$$M_a := \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$
*Si ha*
$$M_a \geq M_g.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo $\frac{x_1}{M_g}, \dots, \frac{x_2}{M_g}, \frac{x_n}{M_g}$, allora la radice ennesima del prodotto vale 1 ossia $\frac{x_1}{M_g}\frac{x_2}{M_g} \cdots \frac{x_n}{M_g} = 1$, e per il risultato precedente $\frac{x_1}{M_g} + \frac{x_2}{M_g} + \frac{x_n}{M_g} \geq n$, ossia $M_a \geq M_g$. □

Diamo un'altra dimostrazione per induzione che fa uso della disuguaglianza di Bernoulli

DIMOSTRAZIONE.
- Per $n = 1$ la disuguaglianza è vera risultando
$$x_1 = x_1$$
- Supponiamo che al passo $n - 1$ risulti
$$M'_g = \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1} = M'_a$$
Si ha
$$M_a = \frac{(n-1)}{n} M'_a + \frac{x_n}{n} = \left( M'_a + \frac{(x_n - M'_a)}{n} \right),$$

$$\frac{M_a}{M'_a} = \left(1 + \frac{x_n - M'_a}{M'_a}\frac{1}{n}\right), \qquad \left(\frac{M_a}{M'_a}\right)^n = \left(1 + \frac{x_n - M'_a}{M'_a}\frac{1}{n}\right)^n$$

Per applicare la disuguaglianza di Bernoulli dovrà risultare $-M'_a + x_n \geq -nM'_a$ ossia $(n-1)M'_a + x_n \geq 0$, che risulta verificata. Pertanto

$$\left(\frac{M_a}{M'_a}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x_n - M'_a}{M'_a}\right) = \frac{x_n}{M'_a}$$

$$(M_a)^n \geq x_n (M'_a)^{n-1},$$

e quindi per l'ipotesi induttiva

$$(M_a)^n \geq x_n (M'_g)^{n-1} = x_1 \cdot x_2 \dots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i = (M_g)^n.$$

e la dimostrazione è completa □

### 3. Disuguaglianza di Young per esponenti razionali

Come applicazione della disuguaglianza tra la media aritmetica e geometrica dimostriamo la disuguaglianza di Young per esponenti razionali.

Definizione 3.1. *Dato $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$ diciamo coniugato di $p$ il numero reale $q$ tale che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Se $p = \frac{n}{m}$, $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ il coniugato di $p$ è dato da

$$q = \frac{n}{n-m}.$$

Teorema 3.2. *Disuguaglianza di Young (esponenti razionali): dati due numeri reali positivi $x$ e $y$, e dati $p$, $q$ numeri razionali verificanti $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si ha*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza sulle medie

$$(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Fissiamo

$$x_1 = x_2 = \dots x_m = x^p \qquad x_{m+1} = \dots x_n = b^q$$

Fissiamo $p = \frac{n}{m}$ con $m < n$, segue che il coniugato di $p$ è dato da $q = \frac{n}{n-m}$. allora

$$((x^p)^m (y^q)^{n-m})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{mx^p + (n-m)y^q}{n}$$

$$((x^p)^{\frac{m}{n}} (y^q)^{\frac{n-m}{n}} \leq \frac{m}{n} x^p + \frac{n-m}{n} y^q,$$

segue allora la disuguaglianza. □

## 4. Formula del binomio

Definiamo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dimostrare per esercizio, per $1 \leq k \leq n$, ($0! = 1$, per convenzione.)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Applicare la formula precedente per costruire il triangolo di Tartaglia
$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \end{array}$$

Proposizione 6. *Dimostrare per induzione*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

*per ogni coppia di numeri reali $a$ e $b$.*

Dimostrazione. L'asserto è vero per $n = 1$. Assumendo vera la formula al passo $n$ la dimostriamo al passo $n+1$. Vogliamo dimostrare che

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\Big)(a+b) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + a^{n+1} + b^{n+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

□

## 5. Esercizi

ESERCIZIO 5.1. *Dimostrare*

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

$$(\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{2} - 1)^k,$$

ESERCIZIO 5.2. *Dimostrare tramite il principio di induzione*

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

## 6. Esercizi

ESERCIZIO 6.1. *Determinare l'estremo inferiore e superiore dell'insieme numerico*

$$X = \left\{ x_n = \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

**r.** *L'estremo inferiore di $X$ è 0, l'estremo superiore di $X$ è $\frac{3}{4}$.*

CAPITOLO 6

# Successioni

## 1. Successioni limitate

DEFINIZIONE 1.1. *Una successione di numeri reali è un'applicazione dall'insieme* $\mathbb{N}$ *dei numeri naturali in* $\mathbb{R}$*:*

$$n \in \mathbb{N} \longrightarrow x_n \in \mathbb{R}$$

*L'elemento* $x_n \in \mathbb{R}$ *è quindi l'immagine del numero* $n \in \mathbb{N}$

Una successione di numeri reali si dice inferiormente limitata se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $x_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Una successione di numeri reali si dice superiormente limitata se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Una successione si dice limitata se risulta inferiormente e superiormente limitata.

## 2. Successioni monotone

Una successione si dice
monotona crecente

$$x_{n+1} \geq x_n,$$

Esempio: $2^n$.
monotona decrescente

$$x_{n+1} \leq x_n,$$

Esempio: $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Osserviamo che una successione può non essere monotona ma essere oscillante (esempio $(-1)^n$)

PROPOSIZIONE 7. *Dimostriamo che la successione*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

*è monotona crescente.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il rapporto

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{n+2}{(n+1)}\frac{n}{(n+1)}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{(n^2+2n+1)}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n^2+2n+1)}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+1}-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Dalla disuguaglianza di Bernoulli (che vale in senso stretto per ogni $h \neq 0$) si ha,

$$(1+h)^n \geq 1+nh, \quad \forall \quad \text{real} \quad h \geq -1, \quad \forall n \in N$$

abbiamo

$$h = -\frac{1}{n^2+2n+1} > -1, \quad \forall n$$

poichè

$$\frac{1}{n^2+2n+1} < 1, \quad \forall n.$$

E quindi sostituendo nella disuguaglianza precedente

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1.$$

Ciò conclude la prima dimostrazione. $\square$

Dimostrazione. Diamo ora un'altra dimostrazione basata sulla disuguaglianza tra la media aritmetica e geometrica dell'asserto: la successione $(x_n)$ definita da

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots.$$

è limitata e crescente.

Applicando la disuguaglianza

$$\sqrt[n+1]{a_1 \dots a_{n+1}} \leq \frac{a_1+\dots+a_{n+1}}{n+1}$$

con

$$a_1 = \dots = a_n = 1+\frac{1}{n} \quad \text{and} \quad a_{n+1} = 1,$$

otteniamo

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Ciò è equivalente a $x_n \leq x_{n+1}$. Quindi $(x_n)$ è crescente ed è inferiormente limitata da $x_1 = 2$.

In più applicando la disuguaglianza

$$\sqrt[n+2]{a_1 \dots a_{n+2}} \leq \frac{a_1+\dots+a_{n+2}}{n+2}$$

con

$$a_1 = \dots = a_n = 1+\frac{1}{n} \quad \text{and} \quad a_{n+1} = a_{n+2} = \frac{1}{2}$$

otteniamo

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{n+2}{n+2} = 1.$$

Equivalente a $x_n \leq 4$. Quindi $(x_n)$ è limitata superiormente da 4. $\square$

ESERCIZIO 2.1. *Dimostrare* $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ *è limitata*

DIMOSTRAZIONE.

$$0 \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < 1$$

□

PROPOSIZIONE 8. *La successione*

$$x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n,$$

*è crescente.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$x_2 > x_1$$

Per $n > 1$ consideriamo il quoziente

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n}{(n+1)}\frac{n}{(n-1)}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{n^2}{(n^2-1)}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right) =$$

$$\left(\frac{n^2-1+1}{(n^2-1)}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n^2-1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

Applichiamo la disuguaglianza di Bernoulli, con

$$0 < h = \frac{1}{n^2-1}, \quad \forall n > 1$$

Da cui sostituendo nella precedente disuguaglianza

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right) > 1, \quad \forall n > 1$$

Anche la successione $(x_n)$ definita da

$$x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

è crescente come applicazione della

$$\sqrt[n+1]{a_1 \ldots a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1}$$

with

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{and} \quad a_{n+1} = 1,$$

otteniamo

$$\sqrt[n+1]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ciò è equivalente a $x_n \leq x_{n+1}$. Quindi $(x_n)$ è crescente. □

Proposizione 9. *Dimostrare* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *è limitata*

Dimostrazione.

$$0 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < 8$$

□

Proposizione 10. *La successione*

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

*è decrescente.*

Dimostrazione. Abbiamo

$$x_2 < x_1$$

Per $n > 1$ consideriamo il quoziente

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} =$$

$$\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

□

## 3. Successioni divergenti positivamente e negativamente

Definizione 3.1. *Una successione* $(x_n)_{\mathbb{N}}$ *si dice* divergente positivamente, *se per ogni numero reale* $M > 0$ *esiste* $\nu \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$n > \nu \Longrightarrow x_n > M.$$

*In questo caso si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Definizione 3.2. *Una successione* $(x_n)_{\mathbb{N}}$ *si dice* divergente negativamente, *se per ogni numero reale* $M > 0$ *esiste* $\nu \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$n > \nu \Longrightarrow x_n < -M.$$

*In questo caso si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Esempio di successione divergente positivamente : $x_n = 2^n$

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$

Esempio di successione divergente negativamente : $x_n = \ln\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\frac{1}{n} = -\infty$$

Definizione 3.3. *Si dice che la successione* $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge *al numero reale* $l$, *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\nu \in \mathbb{N}$ *tale che* $n > \nu \Longrightarrow |x_n - l| < \varepsilon$. *In simboli*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l,$$

*che si legge* limite di $x_n$ rispetto a $n$ uguale ad $l$.

Poichè $|x_n - l| < \varepsilon$ equivale a

$$-\varepsilon < x_n - l < \varepsilon,$$

cioè

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon,$$

si può anche scrivere

$$n > \nu \Longrightarrow l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon.$$

Esempio di successione convergente : $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Teorema Se $(x'_n)_{\mathbb{N}}$ e $(x''_n)_{\mathbb{N}}$ sono successioni regolari (cioè successioni che ammettono limite $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), si ha

(1) $\lim_{n\to\infty}(c_1 x'_n + c_2 x''_n) = c_1 \lim_{n\to\infty} x'_n + \ c_2 \lim_{n\to\infty} x''_n$,
(2) $\lim_{n\to\infty}(x'_n \cdot x''_n) = \lim_{n\to\infty} x'_n \cdot \lim_{n\to\infty} x''_n$,
(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x'_n}{x''_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} x'_n}{\lim_{n\to\infty} x''_n}$,

in tutti i casi in cui il secondo membro ha significato in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Forme Indeterminate

Se $x'_n \to -\infty$ e $x''_n \to +\infty$, allora $x'_n + x''_n$ non può essere inquadrata in nessuno dei casi già considerati.

Questo rientra infatti tra quelli in cui il secondo membro $-\infty + (+\infty)$ non ha significato in $\tilde{\mathbb{R}}$.

Facciamo vedere, per mezzo di esempi, come la successione $x'_n + x''_n$ può essere di qualunque tipo.

$$x'_n = -n,\ x''_n = n \quad x'_n + x''_n = 0,\ \textit{convergente};$$

$$x'_n = -n,\ x''_n = n + (-1)^n \quad x'_n + x''_n = (-1)^n,\ \textit{non regolare};$$

$$x'_n = -n,\ x''_n = n^2 \quad x'_n + x''_n = (n-1)n, \quad \longrightarrow +\infty;$$

$$x'_n = -n^3,\ x''_n = n^2 \quad x'_n + x''_n = n^2(1-n), \quad \longrightarrow -\infty.$$

Per questo motivo quando

$$\begin{cases} x'_n & \to -\infty \\ x''_n & \to +\infty \end{cases}$$

si dice che la successione

$$x'_n + x''_n$$

si presenta sotto la forma indeterminata $\boxed{\infty - \infty}$.

Analoghe considerazioni valgono per $x'_n - x''_n$ se $x'_n \to +\infty$ e $x''_n \to +\infty$ o anche se $x'_n \to -\infty$ e $x''_n \to -\infty$.

- Se
$$\begin{cases} x'_n & \to 0 \\ x''_n & \to \pm\infty \end{cases}$$
la successione
$$x'_n \cdot x''_n,$$
si presenta nella forma indeterminata $\boxed{0 \cdot \infty}$.
- Se invece
$$\begin{cases} x'_n & \to \pm\infty \\ x''_n & \to \pm\infty \end{cases}$$
si dice che la successione
$$\frac{x'_n}{x''_n},$$
si presenta nella forma indeterminata $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$.
- Quando, infine
$$\begin{cases} x'_n & \to 0 \\ x''_n & \to 0 \end{cases}$$
si dice che la successione
$$\frac{x'_n}{x''_n},$$
si presenta nella forma indeterminata $\boxed{\frac{0}{0}}$.

## 4. Successione non regolare

*Definizione.* Una successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ si dice *non regolare o oscillante* se non ammette limite.
Esempio di successione non regolare: $x_n = (-1)^n$ non esiste il $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$

PROPOSIZIONE 11. *Dato l'applicazione $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. $i(k) = j$ con $i(k+1) > i(k)$, una successione estratta è la successione ristretta a $i(k)$. Se $x_n$ converge a $x \in \mathbb{R}$ (oppure diverge positivamente o negativamente) allora ogni estratta di $x_n$ converge a $x$ (oppure diverge positivamente o negativamente).*

ESEMPIO 4.1. *Non esiste il $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ perchè calcolata nell'estratta di indici pari la sottosuccessione converge a 1, nell'estratta di indici dispari la sottosuccessione converge a $-1$.*

## 5. Permanenza del segno per successioni

Sia $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ con $l > 0$ allora esiste $\nu$ tale che $x_n > 0$ per $n > \nu$.
Sia
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = l'$$

- Se $x_n < 0$ per ogni $n$ allora $x \leq 0$. Ricordare l'esempio $x_n = -\frac{1}{n}$ $x_n < 0$ per ogni $n$ ma $l = 0$
- Se $x_n \leq 0$ per ogni $n$ allora $l \leq 0$.
- Se $x_n \leq y_n$ per ogni $n$ allora $l \leq l'$

ESERCIZIO 5.1. *Dimostrare che se per $x$, $y$ reali risulta $x < y + \frac{1}{\sqrt{n}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $x \leq y$.*

### 5.1. Il teorema del confronto.

TEOREMA 5.2. *Siano $x_n$, $y_n$, e $z_n$ tre successioni.*

- *Se $x_n \to x \in \mathbb{R}$, $z_n \to x \in \mathbb{R}$, e $x_n \leq y_n \leq z_n$, allora $y_n \to x$*
- *Se $y_n \to +\infty$ e $x_n \geq y_n$, allora $x_n \to +\infty$.*
- *Se $y_n \to -\infty$ e $x_n \leq y_n$, allora $x_n \to -\infty$.*

## 6. Calcolo di limiti

Sia $x_n$ una successione a termini positivi. Posto

$$y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

si ha: se $\lim_{n\to+\infty} y_n < 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.
Applicazione. $x > 1, c > 0, n \in \mathbb{N}$

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^c}{x^n} = 0$$
- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

## 7. Il teorema fondamentale sulle successioni monotone

TEOREMA 7.1. *Se $x_n$ è crescente e superiormente limitata allora*

$$\sup_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

*Se $x_n$ è decrescente e inferiormente limitata allora*

$$\inf_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

*Se $x_n$ è crescente e superiormente non limitata allora*

$$\sup_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

*Se $x_n$ è decrescente e inferiormente non limitata allora*

$$\inf_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per fissare le idee, che $(x_n)_{\mathbb{N}}$ sia crescente. Se non è limitata, non lo è superiormente. Infatti $x_1$ è un minorante.

Comunque si scelga un numero $M \in \mathbb{R}$ esiste un elemento della successione, $x_\nu$, tale che $x_\nu > M$.

Per ogni $n > \nu$ si avrà $x_n \geq x_\nu > M$ e questo significa $x_n \to +\infty$.

Se $(x_n)_{\mathbb{N}}$ è limitata, avrà estremo superiore $e_M \in \mathbb{R}$. Per le proprietà dell'estremo superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un termine della successione, sia $x_\nu$, tale che $x_\nu > e_M - \varepsilon$.

Per $n > \nu$ si avrà $x_n \geq x_\nu$ e $x_n \leq e_M$. Perciò da $n > \nu$ segue

$$e_M - \varepsilon < x_\nu \leq x_n \leq e'_M < e_M + \varepsilon.$$

Ciò significa $x_n \to e'_M$.

In modo analogo si prova l'altro caso. □

Esercizio 7.2. *Come esercizio sul teorema fondamentale sulle successioni monotone provare il teorema nel caso di successioni decrescenti e limitate. (suggerimento* $l' = \inf_n x_n$*. Per definizione di estremo inferiore* $x_n \geq l'$*, per ogni* $n$*; inoltre* $\forall \epsilon > 0$ *esiste* $\nu$ *tale che* $x_\nu - \epsilon < l'$*. Ma* $x_\nu \leq x_n$ *se* $n > \nu$*....).*

CAPITOLO 7

# Il numero di Nepero

## 1. introduzione al numero di Nepero

Scoperto da John Napier, e indicato con la lettera $e$ , il numero di Nepero è ora universalmente noto con la lettera $e$, dopo l'uso di tale lettera da parte di Eulero. Ecco alcune altre notazioni tra 1690 e il 1787, tratto da un libro di Florian Cajori, matematico del XIX secolo (wikipedia).

1690 b Leibniz, Letter to Huygens
1691 b Leibniz, Letter to Huygens
1703 a A reviewer, Acta eruditorum
1727 e Euler, Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta
1736 e Euler, Mechanica sive motus scientia analytice exposita
1747 c D'Alembert, Histoire de l'Académie
1747 e Euler, various articles.
1751 e Euler, various articles.
1760 e Daniel Bernoulli, Histoire de l'Académie Royal des Sciences
1763 e J. A. Segner, Cursus mathematici
1764 c D'Alembert, Histoire de l'Académie
1764 e J. H. Lambert, Histoire de l'Académie
1771 e Condorcet, Histoire de l'Académie
1774 e Abb Sauri, Cours de mathématiques

Consideriamo l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \quad \text{tali che } x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad n \in \mathbb{N}\}.$$

Dimostriamo che l'estremo superiore di $A$ è un numero reale. Come precedentemente dimostrato, $k! \geq 2^{k-1}, \quad \forall k \geq 1, k \in \mathbb{N}$. Si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 1 + 2 = 3$$

Inoltre

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > 2$$

Da cui si evince

$$2 \leq \sup_n A \leq 3.$$

Per definizione, poniamo

$$e = \sup_n A.$$

Abbiamo $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ che è una successione monotona crescente. Dal teorema fondamentale sulle successioni monotone, deduciamo

$$e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Dalla formula del binomio di Newton

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}$$

Ma,

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n\dots n_{k-\text{volte}}}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n\dots n_{k-\text{volte}}} = 1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})\dots \le 1.$$

Allora,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

e passando al sup, definendo

$$A' = \{x \in R \quad \text{tale che } \mathrm{x}_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad n \in N\},$$

si ha

$$\sup_n A' \le \sup_n A$$

Dalla limitarezza di $A'$ si evince il suo estremo superiore $e'$ è un numero reale.

Fin'ora abbiamo dimostrato

$$e' \le e$$

Vogliamo in realtà dimostrare che $e' = e$.

Prendiamo $n > m$. Allora

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!} \ge \sum_{k=0}^{m} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}$$

Da cui passando all'estremo superiore su $m$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!} =$$

Osservando che

$$1 = \sup_n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}$$

Passando all'estremo superiore su $n$,

$$\sup_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Allora otteniamo l'altra disuguaglianza, e quindi l'uguaglianza.

**1.1. La funzione esponenziale.** Al variare di $x \in \mathbb{R}$ consideriamo

$$f(x) = e^x$$

Per analogia a quanto visto precedentemente poniamo

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

**1.2. Ancora sul numero di Nepero.** Precedentemente abbiamo verificato

$$e = \sup_n \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

e $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è una successione monotona crescente. Dal teorema fondamentale sulle successioni monotone, deduciamo

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Inoltre vale per il teorema del prodotto dei limiti

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Sappiamo che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è una successione monotona decrescente inferiormente limitata Dal teorema fondamentale sulle successioni monotone, deduciamo

$$e = \inf_n \left\{ (1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Si ha

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

e passando ai logaritmi

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 < \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

ossia

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

## 2. Le buste e le lettere

Date $n$ e le corrispondi $n$ buste in quanti modi possiamo mettere le lettere nelle buste in modo tale che nessuna lettera sia nella busta giusta? Per ogni sottoinsieme di $A \subset \{1, \dots, n\}$ denotiamo con $f(A)$ il numero di permutazioni $\{1, \dots, n\}$ che lasciano fisso ogni elemento di $A$. Allora

$$f(A) = (n - |A|)!,$$

con $|A|$ il numero degli elementi di $A$.

Si ha che il numero $N$ di tali permutazioni è il numero naturale più vicino a $\frac{n!}{e}$ ossia è la parte intera di $\frac{1}{e} + \frac{n!}{e}$.

Dimostrazione. Osserviamo che il risultato è banale per $n = 1$; per una busta e una lettera: $N = 0$. Assumiamo quindi $n \geq 2$.

Osserviamo che $\forall k,\ 0 \leq k \leq n$, ci sono esattamente $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi di $k$ elementi di $\{1, \dots, n\}$, otteniamo allora

$$\begin{aligned} N(n) &= \sum_{A \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|A|} f(A) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Ne segue dalle stime per serie alterne

$$\left| \frac{N(n)}{n!} - \frac{1}{e} \right| < \frac{1}{(n+1)!}.$$

e anche

$$\frac{n!}{e} < N(n) < \frac{n!}{e} + \frac{1}{(n+1)} \qquad N(n) = \lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{(n+1)} \rfloor.$$

$\square$

## 3. Logaritmi e proprietà dei logaritmi in base neperiana

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, , il logaritmo in base neperiana ha la proprietà

$$e^{\log x} = x.$$

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$, vale

- $\log xy = \log x + \log y$.
- $\log \frac{1}{x} = -\log x$.
- $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$.
- Per $t$ reale, $\log x^t = t \log x$.
- Per ogni $x \neq 0, \log x^2 = 2 \log |x|$
- per ogni $x, y$ con $xy > 0$,
  $\log xy = \log |x| + \log |y|$.

## 4. Applicazione della formula del binomio al calcolo di limiti

$$\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}}=1.$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'identità

$$\left[\left((n)^{\frac{1}{n}}-1\right)+1\right]^n=n$$

Dalla formula del binomio,

$$[\left((n)^{\frac{1}{n}}-1\right)+1\Big]^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((n)^{\frac{1}{n}}-1\right)^k,$$

considerando nella somma unicamente l'addendo ottenuto per $k=2$, otteniamo

$$\frac{n(n-1)}{2}\left((n)^{\frac{1}{n}}-1\right)^2<n,$$

quindi

$$0\le(n)^{\frac{1}{n}}-1<\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$
$$1\le(n)^{\frac{1}{n}}<1+\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

Passando al limite,

$$\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}}=1.$$

□

## 5. Un teorema di Cesaro

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali positivi. Allora

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l\implies\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=l,$$

qualinque sia $l\in\cup\{-\infty,+\infty\}$.

E' facile vedere che un' applicazione del teorema di Cesaro è la seguente

$$\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}}=1.$$

Infatti basta applicare il teorema con $a_n=n$.

## 6. Formula di Stirling

James Stirling (Scotland, 1692-1770)

Vale la seguente formula di approssimazione (appare sia $e$ che $\pi$)

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

ossia

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}=1.$$

## 7. Esercizi

ESERCIZIO 7.1. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

*Dalla disuguaglianza di Bernoulli*

$$1-\frac{1}{n}<\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n<1$$

*Da cui, passando al limite*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=1$$

ESERCIZIO 7.2. *Tenuto conto dell'esercizio precedente calcoliamo*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

*Abbiamo*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

*allora*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$$

ESERCIZIO 7.3. *Dimostrare che non esiste il limite della successione*

$$a_n=\begin{cases}(\frac{n-1}{n+1})^n & \textit{se } n \textit{ è pari,}\\ (\frac{n-1}{n})^n & \textit{se } n \textit{ è dispari.}\end{cases}$$

**r.** *Il termine generale della successione si può anche scrivere*

$$a_n=\begin{cases}(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}})^n & \textit{se } n \textit{ è pari}\\ (1-\frac{1}{n})^n & \textit{se } n \textit{ è dispari}\end{cases}$$

*Cosicchè se $n$ è pari $a_n\to\frac{1}{e^2}$ mentre se $n$ è dispari $a_n\to\frac{1}{e}$, quindi la successione non ammette limite.*

CAPITOLO 8

# Serie

## 1. Serie geometrica

- $$x_n = q^n$$

  Allora

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & q \in ]-1,1[ \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

Consideriamo

- $$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots$$

  *serie geometrica di ragione* $q$.

Ridotta $-n$sima

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

.

Se $q = 1$ si ha

$$s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Sia $q \neq 1$. Abbiamo dimostrato che

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Se $|q| < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Se $q > 1$, poichè $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{1}{q-1} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n - 1 = \frac{1}{q-1} \cdot +\infty = +\infty$$

Sia ora $q = -1$,

$$s_n = \frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2p \\ 1 & , \quad n = 2p+1 \end{cases}$$

Pertanto la successione $(s_n)_{\mathbb{N}}$ non è regolare.

Sia infine $q < -1$. Possiamo scrivere $q = -|q|$, e quindi

$$s_n = \frac{1-(-|q|)^n}{1+|q|} = \frac{1-(-1)^n|q|^n}{1+|q|}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1-|q|^{2p}}{1+|q|}, & n = 2p \\ \dfrac{1+|q|^{2p-1}}{1+|q|}, & n = 2p-1 \end{cases}$$

Ne segue che $S_{2p} \to -\infty$ e $S_{2p-1} \to +\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{n\to\infty} s_n$
Allora

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-q} & q \in ]-1,1[ \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

Esercizio 1.1. *Dimostare che la frazione generatrice di $0.\overline{5}$ ùguale a* 5/9

$$0.\overline{5} = 5(10)^{-1} + 5(10)^{-2} + \cdots + 5(10)^{-n} + \cdots = 5\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{5}{9}$$

## 2. Insieme di Cantor

Dividiamo $[0,1]$ in tre parti uguali e togliamo lintervallo aperto centrale di ampiezza 1/3 Dividiamo ciascuno dei due intervalli chiusi che rimangono in tre parti uguali e rimuoviamo i due intervalli aperti centrali di ampiezza 1/9 e cosi via. L'insieme che si ottiene si chiama insieme ternario di Cantor. Nell'intorno di ogni punto dell'insieme di Cantor ci sono sia punti contenuti nell'insieme che punti contenuti nel suo complementare. Ogni punto dell'insieme di Cantor è un punto di accumulazione. Se calcoliamo la misura dell'insieme dei punti che vengono via via rimossi dall'intervallo $[0,1]$ osserviamo che vale

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27}\cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}} = 1.$$

In realtà, anche se la misura dell'insieme di Cantor vale 0, l'insieme contiene molti punti. Infatti si può dimostare che l'insieme di Cantor contiene tanti punti quanti ne contiene l'intervallo [0, 1], ossia l'insieme di Cantor ha la cardinalità del continuo.

## 3. Serie armonica

Si chiama *serie armonica* la serie di temine generale $x_n = 1/n$.

Teorema 3.1. *La serie armonica*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

*diverge positivamente.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo per $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

Allora $e \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ Poichè la funzione $\ln x$ è crescente in $(0, +\infty)$

$$1 = \ln e = \ln a_k \geq k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

Da cui

$$\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln k$$

Facendo le somme da 1 a $n$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1)$$

In conclusione $s_n \geq \ln(n+1)$ e quindi la serie armonica diverge per il teorema di confronto sulle successioni. □

*Importante notare*

OSSERVAZIONE 5. *Per la serie armonica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

*è verificata la condizione $x_n \to 0$; questa condizione è perciò necessaria, ma non è sufficiente per la convergenza della serie.*

**3.1. Teorema (criterio del confronto asintotico.** Sia $x_n$ una successione a termini non negativi per cui esiste il limite e

$$\lim_{n \to +\infty} n x_n = l \neq 0.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$$

*Esempio* Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

$$\lim_{n \to +\infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}\right] = e$$

ossia

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \sim \frac{e}{n} \quad \text{per } n \to \infty,$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è positivamente divergente

## 4. Serie armonica generalizzata

Per $p$ numero reale e positivo. La serie armonica generalizzata è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} +\infty & p \leq 1 \\ < \infty & p > 1 \end{cases}$$

*Dimostrazione del caso di convergenza.*

La successione delle ridotte $n$-sime è regolare, pertanto per valutarne il limite possiamo considerare una sottosuccessione.

$$s_{2^h-1} = 1 + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right] + ..... \left[\frac{1}{(2^{h-1})^p} + \frac{1}{(2^{h-1}+1)^p} + ......... \frac{1}{(2^h-1)^p}\right] <$$

$$1+2\frac{1}{2^p}+4\frac{1}{4^p}+.........2^{h-1}\frac{1}{(2^{h-1})^p} = \sum_{k=1}^{h}\left[\frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}}\right] < \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}}\right] < +\infty$$

*teorema (criterio del confronto asintotico)* Sia $p$ un numero reale e positivo. Supponiamo $p \leq 1$. Sia $x_n$ una successione a termini non negativi tale che per cui esiste il limite e

$$\lim_{n\to+\infty} n^p x_n = l \neq 0.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$$

*Esempio* Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = e$$

ossia

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{e}{\sqrt{n}} \quad \text{per } n \to \infty,$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è positivamente divergente.

*teorema (criterio del confronto asintotico)* Sia $p > 1$ un numero reale. Sia $x_n$ una successione a termini non negativi tale che per cui esiste il limite in $\mathbb{R}$ di

$$\lim_{n\to+\infty} n^p x_n$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$$

ESEMPIO 4.1. *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

*Pertanto*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2} \sim \frac{e}{n^2} \quad \text{per } \; n \to \infty,$$

*ossia*

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

*Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente.*

ESEMPIO 4.2. *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

*Pertanto*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^{2\alpha}} \sim \frac{e}{n^{2\alpha}} \quad \text{per } \; n \to \infty,$$

*ossia*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{2\alpha} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

*Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente per* $\alpha > \frac{1}{2}$ *(* $\iff 2\alpha > 1$*) e divergente per* $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO 4.3. *Studiare il comportamento della serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k+1}.$$

*La serie è convergente, infatti*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k+1} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

*. Studiare la convergenza applicando il confronto asintotico.*

Esercizio 4.4. *Studiare il comportamento della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!}.$$

**r.** *Abbiamo*

$$\frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!} \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

*Dunque la serie*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!}$$

*è positivamente divergente.*
*Studiare la convergenza applicando il confronto asintotico.*

Esercizio 4.5. *Studiare il comportamento della serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}.$$

**r.** *La serie è divergente.*

$$\sqrt{k^2+1} \leq \sqrt{k^2+1+2k} = k+1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty.$$

*Quindi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \geq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty.$$

*Studiare la convergenza applicando il confronto asintotico.*

Esercizio 4.6. *Studiare il comportamento della serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k.$$

**r.** *La serie è positivamente divergente. Infatti*

$$\frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \geq \frac{2}{k}.$$

*Il risultato segue allora dal confronto con la serie armonica.*
*Studiare la convergenza applicando il confronto asintotico.*

Proposizione 12. *Data una serie a termini positivi* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *tale che esista il limite*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, \ \text{con } a_n \neq 0 \text{ per } n \text{ grande},$$

*si ha*

- *se* $l > 1$ *la serie diverge*
- *se* $l < 1$ *la serie converge*
- *non ne stabilisce il comportamento* $l = 1$.

Proposizione 13. *Data una serie a termini positivi* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *tale che esista il limite*

$$\lim {a_n}^{1/n} = l,$$

- *se* $l > 1$ *la serie diverge*
- *se* $l < 1$ *la serie converge*
- *non ne stabilisce il comportamento* $l = 1$.

Esercizio 4.7. *Dopo aver determinato dalla formula ricorsiva*

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \frac{e}{n+1} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

*l'espressione di* $a_n$*, studiare il comportamento della serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

**r.** *Si ha*

$$a_n = \frac{e^n}{n!}.$$

*Si può procedere alla dimostrazione utilizzando il principio di induzione. La formula è vera al primo passo e se supponiamo che sia vera per* $n-1$*, ossia*

$$a_{n-1} = \frac{e^{n-1}}{(n-1)!},$$

*si ha*

$$a_n = a_{n-1}\frac{e}{n}.$$

*Dal passo* $n-1$ *si ricava*

$$a_n = \frac{e^{n-1}}{(n-1)!}\frac{e}{n} = \frac{e^n}{n!},$$

*da cui l'asserto.*

*Si tratta ora di studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{n!}.$$

*È verificata la condizione necessaria per la convergenza*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!} = 0.$$

*La serie è a termini positivi, pertanto la convergenza semplice ed assoluta si equivalgono. Applicando il criterio del rapporto si ha*

$$\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{e^n} = \frac{e}{n+1} < 1 \qquad \forall n > 1.$$

Proposizione 14. *Approssimazione di* $e$ *. Per* $n$ *sufficientemente grande*

$$e \approx 2,71828$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Calcoliamo

$$\sum_{k=0}^{n+m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \frac{1}{(n+m)!} =$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \dots \frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right) \leq$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \dots \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right) < \frac{1}{nn!}$$

Allora per $m \to +\infty$, troviamo

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!},$$

disuguaglianza che consente il calcolo approssimato di $e$. □

PROPOSIZIONE 15. *$e$ non è un numero razionale*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo $e > 2$. Ricordiamo

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!},$$

per $n = 1$ si ha $e < 3$; assumiamo per contraddizione che $e$ sia un numero razionale $e = \frac{p}{q}$ con $p, q$ interi positivi primi tra loro e $q > 1$. Allora

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{qq!},$$

e

$$0 < q!\left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right) < \frac{1}{q},$$

e otteniamo una contraddizione poichè il primo membro è un intero positivo e il secondo membro è un numero minore di uno. □

## 5. Convergenza assoluta

Consideriamo le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

Si ha

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge}$$
- $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \not\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ converge}$$

Per avere due serie differenti nel carattere, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ dovrà contenere un numero infinito di cambi di segno. Una serie prototipo di questo tipo è

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Proposizione 16. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

*è convergente.*

Osservazione 6. *Per questa serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \quad ma \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$$

Dimostrazione. Infatti indicato con

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$$

si ha

$$s_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} =$$

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} + (-1)^{2n+1}\frac{1}{2n+1} + (-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+2} =$$

$$s_{2n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

In forza di

$$-\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \leq 0,$$

si evince

$$s_{2n} \geq s_{2n+2},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ciò mostra che la ridotta di ordine pari è monotona decrescente ed è inferiormente limitata da $s_2 = \frac{1}{3}$. Esiste il limite per $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = S_p$$

Si ha

$$s_{2n+3} = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} =$$

$$\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} + (-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+2} + (-1)^{2n+3}\frac{1}{2n+3} =$$

$$s_{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3}.$$

In forza di

$$\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \geq 0$$

si evince

$$s_{2n+1} \leq s_{2n+3}, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre

$$s_{n+1} = s_{2n} - \frac{1}{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_2$$

Ciò mostra che la ridotta di ordine dispari è monotona crescente ed è superiormente limitata da $s_2 = \frac{1}{3}$. Esiste il limite per $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = S_d,$$

e risulta, passando al limite per $n \to +\infty$

$$S_p = S_d, \text{ perchè } s_{n+1} = s_{2n} - \frac{1}{2n+1}$$

Essendo $S_p$ il limite delle somme parziali pari, per la definizione di limite $\forall \epsilon \exists m$ (pari) tale che $|s_n - S_p| < \epsilon \; \forall n > m$, n pari. Essendo $S_d$ il limite delle somme parziali dispari, per la definizione di limite $\forall \epsilon \; \exists j$ (dispari) tale che $|s_n - S_d| < \epsilon \; \forall n > j$, n dispari. Sappiamo $S_p = S_d$, perciò prendendo $h = \max\{m, j\}$ la disuguaglianza $|s_n - S| < \epsilon$ vale per ogni per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > h$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = S,$$

e la serie converge. □

Vale il Criterio di Leibniz

TEOREMA 5.1. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $a_n$ positivo, decrescente e infinitesimo. Allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge a $S$. In più vale la stima*

$$|S_n - S| < |a_{n+1}|$$

## 6. Esercizi

ESERCIZIO 6.1. *Fare la dimostrazione precedente nel caso più generale, assumendo $a_n$ positivo, decrescente e infinitesimo.*

ESERCIZIO 6.2. *Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

(i) *Definire la successione delle ridotte $N$-sime.*
(ii) *Dare la definizione di convergenza assoluta della serie.*
(iii) *Fare un esempio di serie convergente, ma non assolutamente convergente*

CAPITOLO 9

# I numeri complessi

## 1. L'unita immaginaria: il numero $i$

Non tutte le equazioni $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ con $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{Z}$ hanno una soluzione nell'insieme dei numeri reali. Estendiamo i numeri reali affinchè equazioni polinomiali $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ abbiamo almeno una soluzione nell'estensione di $\mathbb{R}$ che indichiamo con $\mathbb{C}$ (chiusura algebrica di $\mathbb{R}$). In particolare l'equazione $x^2+1=0$ non ha soluzioni rin $\mathbb{R}$. Definiamo l'unità immaginaria $i$ soluzione dell'equazione $x^2+1=0$. La proprietà del numero $i$ è data dalla relazione

$$i^2=-1.$$

## 2. Forma algebrica dei numeri complessi

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ corrisponde ad una coppia ordinata di numeri reali $(x, y)$. Definiamo forma algebrica di un numero complesso $z$

$$z=x+iy.$$

$x$ e $y$ sono rispettivamente la parte reale e il coefficiente dell'unita immaginaria immaginaria, e vengono scritti tramite la notazione

$$x=\Re z \qquad y=\Im z$$

La forma algebrica si presta facilmente all'operazione di somma .
Dati due numeri complessi $z=x+iy$ e $w=u+iv$

l'operazione di somma $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ si definisce al seguente modo

$$(z, w)\to z+w=(x+u)+i(y+v)$$

Ricordiamo che

$$z=0 \iff (x, y)=(0,0).$$

Nell'operazione di prodotto$\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ si opera algebricamente sapendo che $i^2=-1$.

$$z\cdot w=(xu-yv)+i(yu+xv)$$

Molto spesso si omette il simbolo $\cdot$ usando più praticamente $zw$.
L'opposto $-z$ è dato da

$$-z=-x-iy\ ,$$

mentre il reciproco

$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}\ , z\neq 0\ (x, y)\neq(0,0).$$

I numeri complessi si possono identificare con i punti del piano reale ed è particolarmente importante la simmetria rispetto all'asse delle ascisse espressa dall'operazione di coniugio $C \to C$. Dato $z = x + iy$ il conuigato di $z$ è il numero complesso

$$\overline{z} = x - iy.$$

L'operazione di coniugio è una funzione complessa di variabile complessa che vediamo. Studiamone le proprietà.

Dato $z$ e $w \in \mathbb{C}$, $z + w$ è un numero complesso, a cui possiamo applicare l'operazione di coniugio. Il risultato non cambia se consideriamo $z$ e ne facciamo il coniugato, consideriamo $w$ e ne facciamo il coniugato, e poi sommiamo i due. In simboli

- $$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$$

  Dato $z$ e $w \in \mathbb{C}$ $zw$ è un numero complesso, a cui possiamo applicare l'operazione di coniugio. Il risultato non cambia se consideriamo $z$e ne facciamo il coniugato, consideriamo $w$ e ne facciamo il coniugato, e poi moltiplichiamo i due. In simboli
- $$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

  Inoltre se operiamo due volte l'operazione di coniugio otteniamo il numero di partenza.
- $$\overline{\overline{z}} = z$$

Ha interesse considerare il prodotto di $z$ per il suo coniugato$\overline{z}$. Mentre il prodotto di $z$ con se stesso produce un nuovo numero complesso $z^2$ il prodotto di di $z$ per il suo coniugato$\overline{z}$ fornisce un numero reale.

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{1}$$

essendo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} \ \textit{modulo di } z.$$

Notiamo che $|z| = 0 \iff z = 0$. Per $z \neq 0$ si ha

$$z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \qquad \text{per cui} \qquad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

da cui si ottiene la formula del reciproco.

Valgono le relazioni

$$\Re z = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \Im z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

**2.1. Forma trigonometrica dei numeri complessi.** La rappresentazione nel piano dei numeri complessi permette una rappresentazione mediante coordinate polari *forma trigonometrica di z*. La forma trigonometrica è particolarmente utile nelle operazioni di prodotto e radice.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \qquad \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0, \ \theta \in [0, 2\pi)$$

Dato $z = x + iy$ si ha

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$ e $\theta = \arg z$.

L'argomento $\theta$ è individuato a meno di multipli interi di $2\pi$. Si ha quindi un insieme $\theta + 2k\pi\ k \in \mathbb{Z}$. Osserviamo che se $\rho = 0$ (cioè $z = 0$) arg $z$ resta indeterminato. Partendo dalla condizione $z_1 - z_2 = 0$ si ha

$$z_1 = z_2 \iff \Re z_1 = \Re z_2 \quad \Im z_1 = \Im z_2,$$

conseguentemente

$$z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \quad \text{arg } z_1 = \text{ arg } z_2 + 2k\pi$$

## 3. Argomento principale

Può essere conveniente fissare un argomento. L' argomento principale., Arg $z$, è fissato in modo che risulti

$$-\pi < \text{ Arg } z \leq \pi$$

$$\text{Arg } z = \begin{cases} (\text{sign}(y))\frac{\pi}{2}. & x = 0, \\ \arctan\frac{y}{x} & x > 0, \text{ ossia} \qquad \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & x < 0,\ y \geq 0, \qquad \text{ossia} \qquad \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ -\pi + \arctan\frac{y}{x} & x < 0,\ y < 0, \qquad \text{ossia} \qquad \theta \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Infatti Arg $z = \theta$: Arg $z$ è l'unica soluzione in $(\pi, \pi]$ del sistema

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad -\pi < \theta \leq \pi \end{cases}$$

(1) Se $x = 0$ allora si ha il sistema

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = \frac{y}{|y|} \qquad -\pi < \theta \leq \pi \end{cases}$$

la cui unica soluzione del sistema sopra descritto è

$$\theta = (\text{sign}(y))\frac{\pi}{2}.$$

(2) Nel caso

$$x \neq 0,$$

si ha il sistema

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad -\pi < \theta \leq \pi \end{cases}$$

ossia l'unione dei tre sistemi

$$\begin{cases} \tan\theta = \frac{y}{x} \\ x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan\theta = \frac{y}{x} \\ x < 0, \qquad y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan\theta = \frac{y}{x} \\ x < 0, \qquad y < 0 \\ -\pi < \theta < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Esercizio precedentemente risolto (vedi funzioni trigonometriche)..

## 4. Prodotto

Prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad r = |z| \quad \theta = \text{ arg } z$$

$$w = \rho(\cos\rho + i\sin\varphi) \quad \rho = |z| \quad \varphi = \text{ arg } w$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r\rho[(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta)] \\ &= r\rho[\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)] \end{aligned}$$

naturalmente

$$z \cdot w = |z \cdot w|[\cos(\text{arg } (z \cdot w)) + i\sin(\text{arg } (z \cdot w))]$$

Per cui

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \qquad\qquad \text{arg } (z \cdot w) = \text{ arg } z + \text{ arg } w.$$

ESERCIZIO 4.1. *Utilizzando il principio di induzione dimostrare*

$$z^n = |z|^n(\cos n \ arg\ z + i\sin n\ arg\ z),\ n \in \mathbb{N}$$

## 5. Forma esponenziale di un numero complesso

Notiamo che la funzione $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ verifica $f(\theta) \cdot f(\varphi) = f(\theta+\varphi)$ Tale proprietà è tipica dell'esponenziale. Poniamo

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

e la scrittura

$$z = |z|e^{i\cdot\theta} \qquad\qquad (\text{ esponenziale complessa}).$$

Notiamo che $|e^{i\theta}| = 1$,infatti $|e^{i\theta}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Osserviamo che poiché

$$\text{arg } (z \cdot w) = \text{ arg } z + \text{ arg } w.$$

Definizione di esponenziale in $\mathbb{C}$.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$|e^z| = e^x \qquad \text{arg } e^z = y + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Osserviamo che moltiplicare $z$ per $e^{i\varphi}$ equivale a far effettuare a $z$ una rotazione di $\varphi$.

## 6. Formule di Eulero

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad\qquad e^{-i\theta} = e^{\overline{i\theta}}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Da cui $\sin z$ e $\cos z$ in $\mathbb{C}$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Dalla formula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

abbiamo per $\theta = \pi$ $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0,}$ nota come l'identità di Eulero.

## 7. Radici $n$–sime di un numero complesso

OSSERVAZIONE 7.

$$z = w \iff \Re z = \Re w, \quad \Im z = \Im w$$

*oppure*

$$z = w \iff |z| = |w| \quad arg\ z = arg\ w + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Diciamo $w$ radice $n$–sima di $z$ se e solo se $w^n = z$.
Supponiamo $z \neq 0$, allora

$$w = |w|e^{i\varphi} \qquad\qquad z = |z|e^{i\theta}$$

$$w^n = |w|^n e^{in\varphi} = |z|e^{i\theta}$$

quindi

$$|w|^n = |z| \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad \text{ossia}$$

$$\begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \varphi_n = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}(2\pi)\} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

al variare di $k$ le radici $n$–sime *non* sono infinite; *vi sono solo* $n$ *radici distinte* infatti

$$\varphi_{k+pn} = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}(2\pi) + 2\pi p$$

coincide (modulo $2\pi$) con $\varphi_k$

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n} \qquad \varphi_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \qquad \varphi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}$$

$$\varphi_{n-1} = \frac{\theta}{n} + \frac{n-1}{n}(2\pi)$$

$\{z^{1/n}\}$ $n$–radici $n$–sime di $z$:

$$|w_k| = \sqrt[n]{|z|} \qquad \arg\ w_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Dando a $k$ i valori interi consecutivi si hanno gli argomenti:

$$\phi_0 = \frac{\theta}{n} \quad \phi_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \phi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}, \ldots, \quad \phi_{n-1} = \frac{\theta}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)2\pi,$$

e poi i valori si ripetono.

## 8. La formula del Binomio e la Formula di Eulero

La formula di Eulero: per $x \in \mathbb{R}$, $i$ unità immaginaria $i^2 = -1$.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Ricordiamo la

Formula di triplicazione

$$\cos 3x + i \sin 3x = (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 =$$

$$= \cos^3 x - i \sin^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \sin^2 x \cos x.$$

Uguagliando la parte reale e la parte immaginaria dei due numeri

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\sin 3x = -\sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x$$

Più in generale si ha

PROPOSIZIONE 17. *Si ha*

$$\cos nx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

DIMOSTRAZIONE.

$$\cos nx = \left( \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) = \left( \frac{(e^{ix})^n + (e^{-ix})^n}{2} \right) =$$

$$\frac{(\cos x + i \sin x)^n + (\cos x - i \sin x)^n}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\cos^k x (i \sin x)^{n-k} + \cos^k x (-i \sin x)^{n-k}}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(i)^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i\pi}{2}})^{n-k} + (e^{\frac{-i\pi}{2}})^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i(n-k)\pi}{2}}) + (e^{\frac{-i(n-k)\pi}{2}})}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x$$

□

ESERCIZIO 8.1. *Dalla formula di Eulero, $x \in \mathbb{R}$, $i$ unità immaginaria $i^2 = -1$.*

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

*ricavare che*

$$\sin nx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

ESERCIZIO 8.2. *Dimostrare per induzione per* $\theta \neq 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = e^{in\theta/2}\frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin\theta/2}$$

DIMOSTRAZIONE. . Calcoliamo per $n=1$

$$\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = e^{i\theta/2}\frac{\sin\theta}{\sin\theta/2}$$

$$\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = e^{i\theta}+1$$

$$e^{i\theta/2}\frac{\sin\theta}{\sin\theta/2} = 2e^{i\theta/2}\cos\theta/2 = 2\cos^2\theta/2 + 2i\cos\theta/2\sin\theta/2 =$$

$$\cos^2\theta/2 + \sin^2\theta/2 + \cos^2\theta/2 - \sin^2\theta/2 + 2i\cos\theta/2\sin\theta/2 = e^{i\theta}+1$$

Supponiamo

$$\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = e^{i(n-1)\theta/2}\frac{\sin n\theta/2}{\sin\theta/2}$$

e dimostriamo

$$\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = e^{in\theta/2}\frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin\theta/2} =$$

Calcoliamo

$$\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{in\theta}-1}\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1} =$$

$$\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{in\theta}-1}e^{-i\theta/2}e^{in\theta/2}\frac{\sin n\theta/2}{\sin\theta/2} =$$

$$\sin n\theta/2 = \frac{e^{in\theta/2}-e^{-in\theta/2}}{2i} = \frac{e^{-in\theta/2}}{2i}\left(e^{in\theta}-1\right)$$

Dal calcolo deduciamo che

$$\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{in\theta}-1} = e^{-i\theta/2}e^{in\theta/2}\frac{\frac{e^{-in\theta/2}}{2i}\left(e^{in\theta}-1\right)}{\sin\theta/2} =$$

$$\frac{e^{in\theta}}{\sin\theta/2}\frac{e^{-i(n+1)\theta/2}}{2i}(e^{i(n+1)\theta}-1) =$$

$$\frac{e^{in\theta}}{\sin\theta/2}\sin(n+1)\theta/2$$

□

ESERCIZIO 8.3. *Dimostrare per* $\theta \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ *e utilizzando l'esercizio precedente che*

$$\sum_{k=0}^{n} z^k, \quad z \in \mathbb{C}$$

*puó essere limitato con una costante che non dipende da* $n$.

DIMOSTRAZIONE.

$$\left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\right| = \left|e^{in\theta/2}\frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin\theta/2}\right| \leq \frac{1}{|\sin\theta/2|}$$

□

## 9. Principio di identità dei polinomi

Dati i due polinomi

$$\sum_{k=0}^{n_1} a_k z^k \qquad \sum_{k=0}^{n_2} b_k z^k$$

possiamo sempre scrivere i polinomi come

$$\sum_{k=0}^{m} a_k z^k \qquad \sum_{k=0}^{m} b_k z^k,$$

con $m$ maggiore o uguale al grado di entrambi i polinomi. Il polinomio nullo ̀dato dal polinomio che ha tutti i coefficienti nulli. Due polinomi di uguale grado sono uguali se i coefficienti sono uguali. Vale il teorema fondamentale dell'algebra

Teorema 9.1. *Ogni polinomio di grado* $> 0$ *ha almeno una radice in* $\mathbb{C}$.

Applicando ripetutamente questo teorema possiamo scomporre il polinomio in fattori di primo grado. Dato

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n_1} a_k z^k,$$

allora

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - \alpha_n)$$

## 10. Esercizi

Esercizio 10.1. *Calcolare le radici n-sime dell'unità immaginaria*

Esercizio 10.2. *Calcolare le tre radici cubiche del numero complesso* $z = 4$.

**r.** Calcoliamo il modulo e l'argomento:

$$\rho = 4,$$

$$\theta = 0.$$

Risulta

$$z_1 = 4^{\frac{1}{3}},$$

$$z_2 = 4^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{2}{3} + i\sin\frac{2}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_3 = 4^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{4}{3} + i\sin\frac{4}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esercizio 10.3. *Dato* $z = 1 + i$, *calcolare* $z^{10}$.

Esercizio 10.4. *Dimostrare*

$$\sum_{n=0}^{N} e^{2\pi i n x} = \frac{1 - e^{2\pi i x(N+1)}}{1 - e^{2\pi i x}} \qquad k \in \mathbb{Z},\ x \text{ reale e irrazionale}$$

DIMOSTRAZIONE.

$$\sum_{n=0}^{N} e^{2\pi inx} = \sum_{n=0}^{N} \left(e^{2\pi ix}\right)^n = \frac{1-e^{2\pi ix(N+1)}}{1-e^{2\pi ix}}$$

□

Osserviamo che

$$e^{2k\pi i} = 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

quindi

$$e^z = e^{z+2\pi i},$$

ossia la funzione $e^z$ è periodica di periodo $2\pi i$.
Osserviamo che per $z \in \mathbb{C}$

$$|z|^2 \neq z^2$$

il primo è un numero reale dato da $\Re(z)^2 + \Im(z)^2$, mentre il secondo è un numero complesso

$$(\Re(z) + i\Im(z))(\Re(z) + i\Im(z)) = \Re(z)^2 - \Im(z)^2 + 2i\Re(z)\Im(z)$$