Studio della concavità della funzione Gaussiana in $\mathbb{R}^N$ e Matrici semidefinite negative (calcolo diretto)

Lezione MMII

Ricordiamo lo studio della funzione gaussiana nel caso unidimensionale La funzione gaussiana ha la forma generale seguente

$$f(x) = Ae^{-B(x-x_0)^2},$$

$x_0 \in \mathbb{R}$, A e B positivi. Studiamo il caso $A = 1$, $B = 1$ $x_0 = 0$.

1 1-d: La funzione $f(x) = e^{-x^2}$

La funzione è definita in $\mathbb{R}$ ed è pari, dunque simmetrica rispetto all'asse y, pertanto è possibile studiarla solo per $x > 0$. Risulta

$$e^{-x^2} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

quindi non ci sono intersezioni con l'asse x. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0,$$

pertanto la retta $y = 0$ (asse x) è un asintoto orizzontale per la funzione. Si ha

$$f'(x) = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2},$$

da cui

$$f'(x) > 0 \text{ per } x < 0, \qquad f'(x) < 0 \text{ per } x > 0.$$

Dunque la funzione è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$ ed il punto $(0, 1)$ è il punto di massimo assoluto. Inoltre

$$f''(x) = (-2xe^{-x^2})' = e^{-x^2}(4x^2 - 2).$$

Ponendo

$$e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 0,$$

ricaviamo $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, da cui otteniamo i punti di flesso

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

La funzione è concava in $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

2 2-d: La funzione $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2+x_2^2)}$

Si ha

$$f_{x_1}(x) = -2x_1 e^{-(x_1^2+x_2^2)} = 0$$
$$f_{x_2}(x) = -2x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)} = 0$$
$$\iff (x_1, x_2) = (0, 0)$$
$$f_{x_1,x_1} = -2e^{-(x_1^2+x_2^2)} + 4x_1^2 e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$
$$f_{x_2,x_2} = -2e^{-(x_1^2+x_2^2)} + 4x_2^2 e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$
$$f_{x_1,x_2} = f_{x_2,x_1} = 4x_1 x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$

Calcoliamo la matrice hessiana

$$\begin{pmatrix} -2e^{-(x_1^2+x_2^2)} + 4x_1^2 e^{-(x_1^2+x_2^2)} & 4x_1 x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)} \\ 4x_1 x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)} & -2e^{-(x_1^2+x_2^2)} + 4x_2^2 e^{-(x_1^2+x_2^2)} \end{pmatrix}$$

Il punto $(0, 0)$ è di massimo relativo (e assoluto). Infatti

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice hessiana calcolata nel punto è definita negativa e la funzione è sempre minore o uguale di uno.

$$e^{-2(x_1^2+x_2^2)} \begin{pmatrix} -2 + 4x_1^2 & 4x_1 x_2 \\ 4x_1 x_2 & -2 + 4x_2^2 \end{pmatrix}$$

Inoltre il determinante della matrice

$$e^{-2(x_1^2+x_2^2)}[(-2 + 4x_1^2)(-2 + 4x_2^2) - 16x_1^2 x_2] =$$
$$e^{-2(x_1^2+x_2^2)}(4 - 8(x_1^2 + x_2^2))$$

La matrice è definita negativa se $1 - 2(x_1^2 + x_2^2) > 0$ e $-1 + 2x_1^2 < 0$. Nel caso $n = 2$ si è ancora potuto fare il calcolo esplicitamente tuttavia aumentando la dimensione il calcolo diviene via via più complicato.

Indicando con H_n il determinante della matrice hessiana moltiplicato per $e^{n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}$ per n variabili, nel caso in esame notiamo

$$H_2 = [(-2)^3 x_2^2 - 2H_1]$$

Infatti

$$[(-2)^3 x_2^2 - 2(4x_1^2 - 2)]$$

Per $n = 3$ fornisce

$$H_3 = [(-2)^4 x_3^2 - 2H_2] = [16x_3^2 - 2(4 - 8(x_1^2 + x_2^2))]$$

(verifica diretta)
La formula che vogliamo dimostrare è la seguente

$$H_n = [(-2)^{n+1} x_n^2 - 2H_{n-1}] =$$

- 1.Se si scambiano due righe il determinante cambia di segno.
- 2.Se ad una riga sommo un'altra riga moltiplicata per uno scalare non nullo il determinante non cambia.
- 3.Se ad una colonna sommo un'altra colonna moltiplicata per uno scalare non nullo il determinante non cambia.
- 4.Se si moltiplicano gli elementi di una riga (o colonna)per uno scalare anche il determinante risulta moltiplicato per lo scalare.
- 5. Se in A la riga a_i è somma di due vettori numerici : $a_i = a_i' + a_i$", allora det A si può ottenere come somma dei determinanti delle due matrici A' ed A" aventi come riga di posto i rispettivamente i vettori a_i'e a_i".

$$Det\begin{pmatrix} 4x_1^2-2 & 4x_1x_2 & .... & .... & 4x_1x_n \\ 4x_2x_1 & 4x_2^2-2 & .... & .... & 4x_2x_n \\ ... & .... & ... & .... & .... \\ 4x_nx_1 & 4x_nx_2 & ... & .... & 4x_n^2-2 \end{pmatrix} =$$

Prendere l'ultima riga e applicare la 5, con $a_i'' = (0, 0, 0, \dots, -2)$
Si ottiene

$$Det\begin{pmatrix} 4x_1^2-2 & 4x_1x_2 & .... & .... & 4x_1x_n \\ 4x_2x_1 & 4x_2^2-2 & .... & .... & 4x_2x_n \\ ... & .... & ... & .... & .... \\ 4x_nx_1 & 4x_nx_2 & ... & .... & 4x_n^2 \end{pmatrix} +$$

$$Det\begin{pmatrix} 4x_1^2-2 & 4x_1x_2 & .... & .... & 4x_1x_{n-1} \\ 4x_2x_1 & 4x_2^2-2 & .... & .... & 4x_2x_{n-1} \\ ... & .... & ... & .... & .... \\ 4x_{n-1}x_1 & 4x_{n-1}x_2 & ... & .... & \\ 0 & 0 & ... & .... & -2 \end{pmatrix}$$

Calcolare il primo determinante

$$Det\begin{pmatrix} 4x_1^2-2 & 4x_1x_2 & .... & .... & 4x_1x_n \\ 4x_2x_1 & 4x_2^2-2 & .... & .... & 4x_2x_n \\ ... & .... & ... & .... & .... \\ 4x_nx_1 & 4x_nx_2 & ... & .... & 4x_n^2 \end{pmatrix} =$$

Mettiamo in evidenza $2x_n$ sia dall'ultima riga che dall'ultima colonna e applichiamo la 4. Allora

$$4x_n^2 Det\begin{pmatrix} 4x_1^2-2 & 4x_1x_2 & .... & .... & 2x_1 \\ 4x_2x_1 & 4x_2^2-2 & .... & .... & 2x_2 \\ ... & .... & ... & .... & .... \\ 2x_1 & 2x_2 & ... & .... & 1 \end{pmatrix} =$$

Moltiplichiamo per $2x_1$ l'ultima colonna e la sottraiamo alla prima e poi per $2x_2$ e lo sottraiamo alla seconda e così' via, applicando la 3.

$$4x_n^2 Det \begin{pmatrix} -2 & 0 & .... & .... & 2x_1 \\ 0 & -2 & .... & .... & 2x_2 \\ ... & .... & ... & .... & .... \\ 0 & 0 & ... & .... & 1 \end{pmatrix} = (-2)^{n+1} x_n^2$$

Da cui otteniamo la formula

$$DetH_n = (-2)^{n+1} x_n^2 - 2DetH_{n-1}$$

e

$$DetH_n = (-2)^n (1 - 2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2))$$

Dall'espressione esplicita del determinante si studia la concavità.