. . . .

COGNOME E NOME MATRICOLA FIRMA

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE (Comunicazioni–Elettronica a.a. 2018-2019)

Corretto durante lezione.

---

1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a)Gli autovalori sono reali?
(b)Calcolare almeno un autovalore utilizzando la formula per le equazioni di terzo grado.
(c)Stabilire il segno degli autovalori.

2. Stabilire se la matrice risulta indefinita

3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare il determinate
1. tramite la regola di Sarrus
2. tramite lo sviluppo di Laplace
3. tramite mossa di Gauss

4. Data la funzione $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2c + \frac{1}{2}cx_3^2 - dx_1$ scrivere il secondo membro in forma matriciale. Determinare a, b, c in modo che la matrice risulti negativa e in tale caso calcolare il massimo.

5. Sia A una matrice $n \times n$, simmetrica e definita positiva, B vettore di $\mathbb{R}^n$, sia $x \in \mathbb{R}^n$ e
$f(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x + B \cdot x$
calcolare il minimo.

6. Data la funzione $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + cx$ determinare il minimo in $[0, 1]$ al variare del parametro c in $\mathbb{R}$

7. Data la matrice di Vandemonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

con $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, calcolare il determinante.
Generalizzare la formula

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & .... & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & .... & x_2^{N-1} \\ 1 & .... & .... & .... & ... \\ 1 & x_N & x_N^2 & .... & x_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

con $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}$, calcolare il determinante.

8. Verificare che data

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

$A^T A$ fornisce

$$\begin{pmatrix} 3 & \sum_{i=1}^{3} x_i & \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{3} x_i & \sum_{i=1}^{3} x_i^2 & \sum_{i=1}^{3} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{3} x_i^2 & \sum_{i=1}^{3} x_i^3 & \sum_{i=1}^{3} x_i^4 \end{pmatrix}$$

calcolare il determinante, applicando la formula di Binet.

$$det(A^T A) = det(A^T) det(A) = (\prod_{1 \le i < j \le N} (x_i - x_j))^2$$

Data la matrice $N \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & .... \\ 1 & .... \\ 1 & x_N \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_N \end{pmatrix}$$

calcolare

$$A^T A$$

Per calcolare $det(A^T A)$ utilizziamo la formula di Cauchy Binet Siano A e B due matrici rispettivamente di tipo $k \times m$ e $m \times k$ Il loro prodotto AB quindi una matrice quadrata $k \times k$

La formula di Cauchy-Binet esprime il determinante di

$$det(AB) = \sum_S \det(A_S) \det(B_S)$$

dove S varia fra i sottoinsiemi con k elementi dell'insieme $\{1, 2, \dots, m\}$, $(k < m)$ Per ogni S la matrice A_S il minore $k \times k$ ottenuto da A prendendo solo le colonne i cui indici appartengono a S Analogamente, B_S il minore $k \times k$ ottenuto da B ottenuto da B prendendo solo le righe i cui indici appartengono a S

$$k = 2 \quad m = n$$

Abbiamo

$$det(A^T A) = \sum_{2 \le j \le N} (x_1 - x_j)^2 + \sum_{3 \le j \le N} (x_2 - x_j)^2 + ...(x_{N-1} - x_N)^2$$

$$(N-1) \sum_i x_i^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le N} x_i x_j =$$

$$N \sum_i x_i^2 - \big(\sum_i x_i\big)^2$$

Il precedente ragionamento si generalizza mostrando che la matrice di regressione risulta positiva in caso di punti distinti.

Formula ricorsiva sul determinante per la matrice Hessiana della funzione di Gauss La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ La funzione è definita in $\mathbb{R}$ ed è pari, dunque simmetrica rispetto all'asse y, pertanto è possibile studiarla solo per $x > 0$. Risulta

$$e^{-x^2} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

quindi non ci sono intersezioni con l'asse x. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0,$$

pertanto la retta $y = 0$ (asse x) è un asintoto orizzontale per la funzione. Si ha

$$f'(x) = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2},$$

da cui

$$f'(x) > 0 \text{ per x} < 0, \qquad \text{f}'(\text{x}) < 0 \text{ per x} > 0.$$

Dunque la funzione è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$ ed il punto $(0, 1)$ è il punto di massimo assoluto. Inoltre

$$f''(x) = (-2xe^{-x^2})' = e^{-x^2}(4x^2 - 2).$$

Ponendo

$$e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 0,$$

ricaviamo $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, da cui otteniamo i punti di flesso

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

La funzione concava in $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 2-d: La funzione $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2+x_2^2)}$ Si ha

$$f_{x_1}(x) = -2x_1e^{-(x_1^2+x_2^2)} = 0$$

$$f_{x_2}(x) = -2x_2e^{-(x_1^2+x_2^2)} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \ (x_1, x_2) = (0, 0)$$

$$f_{x_1,x_1} = -2e^{-(x_1^2+x_2^2)} + 4x_1^2e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$

$$f_{x_2,x_2} = -2e^{-(x_1^2+x_2^2)} + 4x_2^2e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$

$$f_{x_1,x_2} = f_{x_2,x_1} = 4x_1x_2e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$

Calcoliamo la matrice hessiana

$$\begin{pmatrix} -2e^{-(x_1^2+x_2^2)} + 4x_1^2e^{-(x_1^2+x_2^2)} & 4x_1x_2e^{-(x_1^2+x_2^2)} \\ 4x_1x_2e^{-(x_1^2+x_2^2)} & -2e^{-(x_1^2+x_2^2)} + 4x_2^2e^{-(x_1^2+x_2^2)} \end{pmatrix}$$

Il punto $(0, 0)$ è di massimo relativo (e assoluto). Infatti

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice hessiana calcolata nel punto definita negativa e la funzione sempre minore o uguale di uno.

$$e^{-2(x_1^2+x_2^2)} \begin{pmatrix} -2 + 4x_1^2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & -2 + 4x_2^2 \end{pmatrix}$$

Inoltre il determinante della matrice

$$e^{-2(x_1^2+x_2^2)}[(-2 + 4x_1^2)(-2 + 4x_2^2) - 16x_1^2x_2] =$$

$$e^{-2(x_1^2+x_2^2)}(4 - 8(x_1^2 + x_2^2))$$

La matrice definita negativa se $1-2(x_1^2+x_2^2)>0$ e $-1+2x_1^2<0$. Nel caso $n=2$ si ancora potuto fare il calcolo esplicitamente tuttavia aumentando la dimensione il calcolo diviene via via pi complicato.

Indicando con H_n il determinante della matrice hessiana diviso per $e^{n(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}$ nel caso n variabili, nel caso in esame notiamo

$$H_2=[(-2)^3x_2^2-2H_1]$$

Infatti

$$[(-2)^3x_2^2-2(4x_1^2-2)]$$

n-d: La funzione $f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2)}$

La formula che vogliamo dimostrare la seguente

$$H_n=[(-2)^{n+1}x_n^2-2H_{n-1}]$$

(Iterare la formula sostituendo H_{n-1} e cosi via)

$$H_n=[(-2)^{n+1}x_n^2-2H_{n-1}]=(-2)^n(1-2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2))$$

Ricordiamo che

1.Se si scambiano due righe il determinante cambia di segno.

2.Se ad una riga sommo un'altra riga moltiplicata per uno scalare non nullo il determinante non cambia.

3.Se ad una colonna sommo un'altra colonna moltiplicata per uno scalare non nullo il determinante non cambia.

4.Se si moltiplicano gli elementi di una riga (o colonna)per uno scalare anche il determinante risulta moltiplicato per lo scalare

5. Se in A la riga a_i somma di due vettori numerici : $a_i=a_i'+a_i''$, allora det A si pu ottenere come somma dei determinanti delle due matrici A' ed A'' aventi come riga di posto i rispettivamente i vettori a_i'e a_i''.

$$Det\begin{pmatrix} 4x_1^2-2 & 4x_1x_2 & .... & .... & 4x_1x_n \\ 4x_2x_1 & 4x_2^2-2 & .... & .... & 4x_2x_n \\ ... & .... & ... & .... & .... \\ 4x_nx_1 & 4x_nx_2 & ... & .... & 4x_n^2-2 \end{pmatrix}=$$

Prendere l'ultima riga e applicare la 5, con $a_i''=(0,0,0,\ldots,-2)$ Si ottiene

$$Det\begin{pmatrix} 4x_1^2-2 & 4x_1x_2 & .... & .... & 4x_1x_n \\ 4x_2x_1 & 4x_2^2-2 & .... & .... & 4x_2x_n \\ ... & .... & ... & .... & .... \\ 4x_nx_1 & 4x_nx_2 & ... & .... & 4x_n^2 \end{pmatrix}+Det\begin{pmatrix} 4x_1^2-2 & 4x_1x_2 & .... & .... & 4x_1x_{n-1} & 0 \\ 4x_2x_1 & 4x_2^2-2 & .... & .... & 4x_2x_{n-1} & 0 \\ ... & .... & ... & .... & .... & \\ 4x_{n-1}x_1 & 4x_{n-1}x_2 & ... & .... & & \\ 0 & 0 & ... & .... & & -2 \end{pmatrix}$$

Calcolare il primo determinante

$$Det\begin{pmatrix} 4x_1^2-2 & 4x_1x_2 & .... & .... & 4x_1x_n \\ 4x_2x_1 & 4x_2^2-2 & .... & .... & 4x_2x_n \\ ... & .... & ... & .... & .... \\ 4x_nx_1 & 4x_nx_2 & ... & .... & 4x_n^2 \end{pmatrix}=$$

Mettiamo in evidenza $2x_n$ sia dall'ultima riga che dall'ultima colonna e applichiamo la 4. Allora

$$4x_n^2Det\begin{pmatrix} 4x_1^2-2 & 4x_1x_2 & .... & .... & 2x_1 \\ 4x_2x_1 & 4x_2^2-2 & .... & .... & 2x_2 \\ ... & .... & ... & .... & .... \\ 2x_1 & 2x_2 & ... & .... & 1 \end{pmatrix}=$$

Moltiplichiamo per $2x_1$ l'ultima colonna e la sottraiamo alla prima e poi per $2x_2$ e lo sottraiamo alla seconda e cos' via, applicando la 3.

$$4x_n^2Det\begin{pmatrix} -2 & 0 & .... & .... & 2x_1 \\ 0 & -2 & .... & .... & 2x_2 \\ ... & .... & ... & .... & .... \\ 0 & 0 & ... & .... & 1 \end{pmatrix}=(-2)^{n+1}x_n^2$$

Da cui otteniamo la formula

$$DetH_n=(-2)^{n+1}x_n^2-2DetH_{n-1}$$

Sostituendo a $detH_{n-1}$ il valore dato dalla precedente formula e cos via

$$DetH_n = (-2)^n(1 - 2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)).$$

$$DetH_1 = (-2)(1 - 2x_1^2)$$
$$DetH_2 = (-2)^2(1 - 2(x_1^2 + x_2^2)$$
$$DetH_3 = (-2)^3(1 - 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^3))$$

Ricordando la definizione di HE_n abbiamo la formula generale

$$DetHE_n = (-2)^n e^{-n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)}(1 - 2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)).$$

In $(0, 0, \cdot, 0)$ la matrice definita negativa