

1.Data la funzione

$$f(x) = \ln |x^2 - \sqrt{32}x + 8|,$$

determinare

- (i) insieme di definizione ed eventuali asintoti verticali.
- (ii) la derivata prima.

La funzione può essere equivalentemente scritta

$$f(x) = \ln(x - 2\sqrt{2})^2 = 2 \ln |x - 2\sqrt{2}|$$

L'insieme di definizione è data da $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\sqrt{2}\}$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = -\infty,$$

pertanto $x = 2\sqrt{2}$ è un asintoto verticale. La derivata prima vale

$$f'(x) = 2 \frac{1}{x - 2\sqrt{2}}$$

2.Data la funzione

$$f(x) = \int_{-1}^x te^{-t^2} dt,$$

determinare

- (i)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$
- (ii) la derivata prima,
- (iii) eventuali punti di minimo e massimo relativi,

Data la funzione

$$f(x) = \int_{-1}^x te^{-t^2} dt,$$

determinare

- (i)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$
- (ii) la derivata prima,
- (iii) eventuali punti di minimo e massimo relativi,

$$f(x) = \int_{-1}^x te^{-t^2} dt = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2e}$$

La derivata prima vale

$$f'(x) = xe^{-x^2}$$

$x = 0$ è un punto di minimo relativo.

3.Risolvere l'equazione differenziale $y''(x) = x$

$$y(x) = \frac{x^3}{6} + c_1x + c_2$$

con c_1 e c_2 costanti reali arbitrarie.

4. Calcolare

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} |\sin x| \cos \frac{x}{2} dx \\ & \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} |\sin x| \cos \frac{x}{2} dx = -2 \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx = \\ & \frac{4}{3} \left[\cos^3 \frac{x}{2} \right]_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{6} (1 - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

5. Calcolare

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^{3k}$$

Si tratta di una serie geometrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^{3k} = \frac{27}{98}$$