ESERCIZIO 19-05-2016
CONVOLUZIONE INFERIORE E SUPERIORE DI UNA FUNZIONE

Data una funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ f \in C(\mathbb{R}^N)$ la convoluzione Inf-Sup f indicate con f_ϵ e con f^ϵ

$$f_\epsilon(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^N} \left(f(y) + \frac{\|x-y\|^2}{2\epsilon} \right) \tag{1}$$

e

$$f^\epsilon(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left(f(y) - \frac{\|x-y\|^2}{2\epsilon} \right) \tag{2}$$

1. Esercizio: caso regolare

Consideriamo il seguente esempio. Sia

$$f = \|x\|^2 .$$

$$f_\epsilon(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^N} \left[\left(\sum_{k=1}^N y_k^2 \right) + \frac{1}{2\epsilon} \sum_{k=1}^N (x_k - y_k)^2 \right]. \tag{3}$$

Per x fissato,

$$F_\epsilon = \left(\sum_{k=1}^N y_k^2 \right) + \frac{1}{2\epsilon} \sum_{k=1}^N (x_k - y_k)^2$$

$$D_{y_j} F_\epsilon = 2y_j - \frac{1}{\epsilon}(x_j - y_j) = 0. \qquad j = 1, \dots, N$$

Quindi

$$y_j = \frac{1}{2\epsilon + 1} x_j,$$

e sostituendo

$$f_\epsilon(x) = \left[\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{(2\epsilon+1)^2} x_k^2 \right) + \frac{1}{2\epsilon} \sum_{k=1}^N (2\epsilon \frac{1}{2\epsilon+1} x_k)^2 \right]. \tag{4}$$

Semplificando

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon+1} \sum_{k=1}^N x_k^2. \tag{5}$$

2. Esercizio: caso non regolare (punto angoloso di minimo)

Consideriamo il seguente esempio. Sia

$$f = \|x\|.$$

$$f_\epsilon(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^N}\left[\left(\sum_{k=1}^N y_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\epsilon}\sum_{k=1}^N (x_k - y_k)^2\right]. \tag{6}$$

Assumiamo $y \neq 0$, calcoliamo il gradiente e poniamolo uguale a 0. Troviamo

$$\frac{y_k}{\|y\|} - \frac{1}{\epsilon}(x_k - y_k) = 0 \qquad \forall k = 1\dots N. \tag{7}$$

Allora abbiamo, quadrando

$$\epsilon^2\frac{y_k^2}{|y|^2} = (x_k - y_k)^2,$$

e sommando su k

$$\|x - y\|^2 = \epsilon^2.$$

Questo implica

$$\|x - y\| = \epsilon.$$

Moltiplichiamo (7) per y_k e sommiamo allora si ottiene

$$\|y\| - \frac{1}{\epsilon}(yx - \ \|y\|^2) = 0.$$

Dalla formula (7) otteniamo anche

$$y_k(\|y\| + \epsilon) = \|y\|x_k \qquad \forall k = 1\dots N.$$

Facendo il quadrato e addizionando

$$\|y\|^2(\|y\| + \epsilon)^2 = \|y\|^2\|x\|^2.$$

Ossia

$$\|y\| + \epsilon = \|x\|$$

e quindi

$$\|x\| > \epsilon \qquad y = \|x\| - \epsilon.$$

per questo valore di y si ha

$$f_\epsilon(x) = \|x\| - \frac{1}{2\epsilon}.$$

Assumiamo $|y| \neq 0$ e $|x| \leq \epsilon$, allora

$$\|y\| + \frac{1}{2\epsilon}\|y - x\|^2 \geq$$

$$\|y\| + \frac{1}{2\epsilon}(\|y\|^2 + |x|^2 - 2\|x\|\|y\| = |y|(1 - \frac{\|x\|}{\epsilon}) + \frac{\|y\|^2}{2\epsilon} + \frac{|x|^2}{2\epsilon} \geq \frac{|x|^2}{2\epsilon}.$$

Mentre f_ϵ in 0 fornisce

$$f_\epsilon(x) = \frac{\|x\|^2}{2\epsilon}.$$

Allora si ottiene

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|^2}{2\epsilon} & \|x\| \le \epsilon \\ \|x\| - \frac{\epsilon}{2} & \|x\| > \epsilon. \end{cases}$$

3. Esercizio: funzione discontinua

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$f_\epsilon(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \left(f(y) + \frac{\|x-y\|^2}{2\epsilon} \right) \tag{8}$$

$$f_\epsilon(x) = \min \left[\inf_{y \le 0} \left(f(y) + \frac{\|x-y\|^2}{2\epsilon} \right), \inf_{y > 0} \left(f(y) + \frac{\|x-y\|^2}{2\epsilon} \right) \right] \tag{9}$$

$$f_\epsilon(x) = \min \left[\inf_{y \le 0} \left(-1 + \frac{\|x-y\|^2}{2\epsilon} \right), \inf_{y > 0} \left(1 + \frac{\|x-y\|^2}{2\epsilon} \right) \right] \tag{10}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \le 0 \\ \min \left[\left(-1 + \frac{x^2}{2\epsilon} \right), 1 \right] & x > 0 \end{cases}$$

$$\min \left[\left(-1 + \frac{x^2}{2\epsilon} \right), 1 \right] = -1 + \frac{x^2}{2\epsilon} \quad -1 + \frac{x^2}{2\epsilon} \le 1$$

$$-1 + \frac{x^2}{2\epsilon} \le 1 \iff x^2 \le 4\epsilon \iff |x| \le 2\sqrt{\epsilon}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \le 0 \\ -1 + \frac{x^2}{2\epsilon} & 0 < x \le 2\sqrt{\epsilon} \\ 1 & x > 2\sqrt{\epsilon} \end{cases}$$

Ref. Fundamentals of Convex Analysis, Di Jean-Baptiste Hiriart-Urruty,Claude Lemaréchal, Springer

Ref. A.Avantaggiati, P.Loreti, An approximation of Hopf-Lax type formula via idempotent analysis Tropical and Idempotent Mathematics and Applications, Proceedings of the International Workshop on Tropical and Idempotent Mathematics, Independent University of Moscow, Russia, August 26–31, 2012. Contemporary Mathematics, Publication Year 2014: Volume 616, ISBNs: 978-0-8218-9496-5 (print); 978-1-4704-1684-3 (online) (pag 47-58) DOI: http://dx.doi.org/10.1090/conm/616)