Sapienza Università di Roma

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sezione di Matematica

Dispensa sulla funzione gaussiana

Paola Loreti e Cristina Pocci

A. A. 2011-2012

1 Introduzione: Gauss

Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 1777- Gottinga, 1855) è stato un matematico, fisico e astronomo tedesco. Le sue eccellenti doti si rivelarono sin dall'infanzia; si racconta che un giorno, durante le scuole elementari, l'insegnante di matematica, infastidito dalla disattenzione degli alunni, assegnò loro per punizione il seguente esercizio

"*calcolare la somma dei primi 100 numeri*: $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$".

Gauss, dopo pochi secondi, rispose "5050", lasciando il maestro senza parole. Probabilmente, egli aveva intuito e applicato la formula

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nella sua tesi (1799), Gauss dimostrò il teorema fondamentale dell'algebra. Inoltre, a lui si deve l'invenzione del metodo dei minimi quadrati, procedura ancora oggi utilizzata in tutte le scienze per minimizzare gli errori di misurazione. Attraverso questo metodo, Gauss riuscì a calcolare il punto esatto in cui sarebbe riapparso l'asteroide Cerere dopo essere scomparso dietro la Luna. Tuttavia, il lavoro più importante in questa direzione fu la scoperta della variabile casuale normale, detta anche gaussiana. La curva è generata dalla funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1}$$

la quale descrive il comportamento e l'entità degli errori di misurazione. È noto che Gauss non amava l'insegnamento; nonostante ciò, molti dei suoi studenti divennero importanti matematici (Riemann fu uno di loro).

Figura 1: Dal 1989 al 2001, il ritratto di Gauss e una distribuzione normale di curve apparvero sulla banconota da dieci marchi tedeschi (immagine da Wikipedia).

La funzione gaussiana (1) ha la forma generale seguente

$$f(x) = Ae^{-B(x-x_0)^2},$$

$x_0 \in \mathbb{R}$, A e B positivi. Studiamo il grafico di questa funzione, al variare dei valori di x_0, A e B.

2 La funzione $f(x) = e^{-x^2}$

Questa è la più semplice curva gaussiana. Questa funzione è definita in $\mathbb{R}$ ed è pari, dunque simmetrica rispetto all'asse y, pertanto è possibile studiarla solo per $x > 0$ e poi "ribaltare" il suo grafico rispetto all'asse y. Per maggiore chiarezza, riportiamo lo studio completo della funzione. Essendo una funzione esponenziale, risulta

$$e^{-x^2} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

quindi non ci sono intersezioni con l'asse x. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0,$$

pertanto la retta $y = 0$ (asse x) è un asintoto orizzontale per la funzione. Si ha

$$f'(x) = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2},$$

da cui

$$f'(x) > 0 \text{ per } x < 0, \qquad f'(x) < 0 \text{ per } x > 0.$$

Dunque la funzione è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$ ed il punto $(0, 1)$ è il punto di massimo assoluto. Inoltre

$$f''(x) = (-2xe^{-x^2})' = e^{-x^2}(4x^2 - 2).$$

Ponendo

$$e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 0,$$

ricaviamo $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, da cui otteniamo i punti di flesso

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

Il grafico della funzione è il seguente.

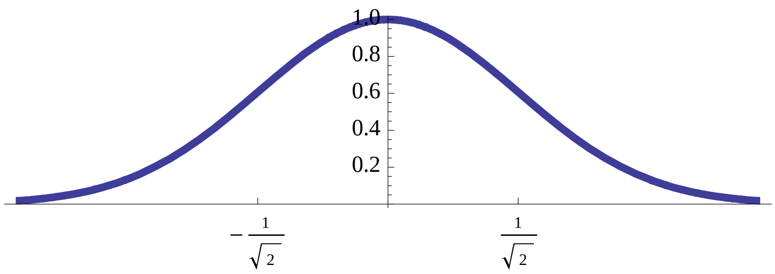


Figura 2: Grafico di $f(x) = e^{-x^2}$, nell'intervallo (-2, 2).

Per la sua forma, la curva di Gauss è anche detta curva a campana.

3 La funzione $f(x) = e^{-(x-x_0)^2}$

Questa funzione è simmetrica rispetto all'asse $x = x_0$.

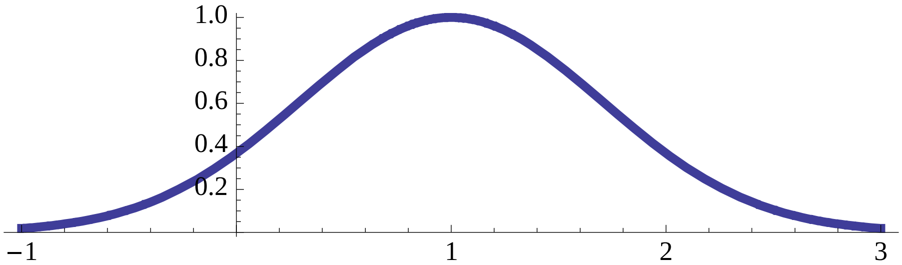


Figura 3: Grafico di $f(x) = e^{-(x-1)^2}$, nell'intervallo (-1, 3).

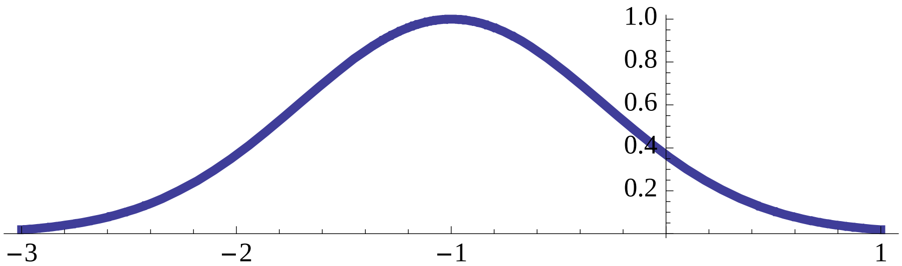


Figura 4: Grafico di $f(x) = e^{-(x+1)^2}$, nell'intervallo (-3, 1).

4 La funzione $f(x) = Ae^{-(x-x_0)^2}$

Il parametro A agisce sulla funzione con un cambio di scala rispetto all'asse y.

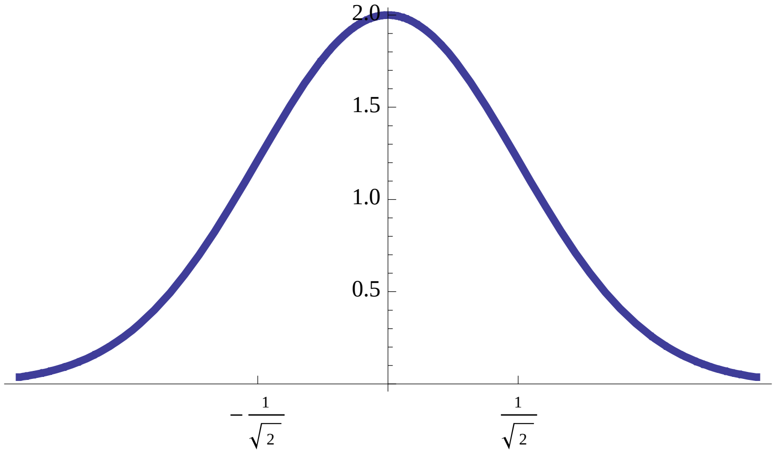


Figura 5: Grafico di $f(x) = 2e^{-x^2}$, nell'intervallo (-2, 2).

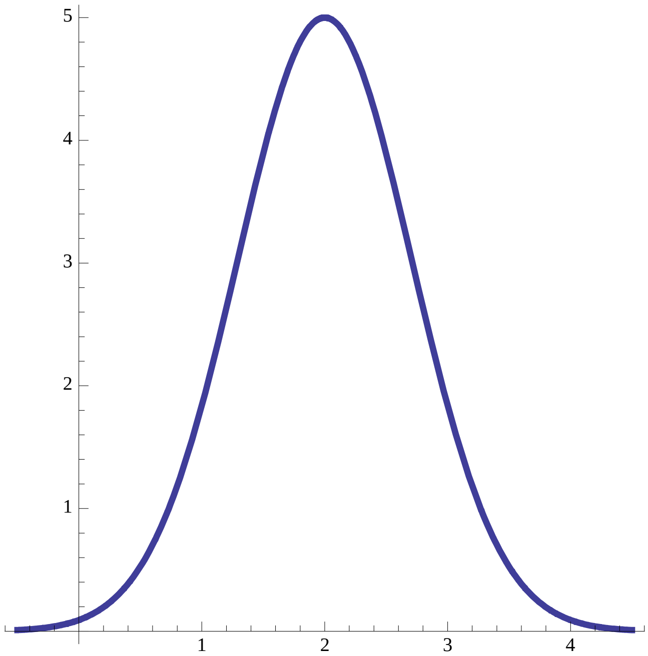


Figura 6: Grafico di $f(x) = 5e^{-(x-2)^2}$, nell'intervallo (-0.5, 4.5).

5 La funzione $f(x) = e^{-B(x-x_0)^2}$

Il parametro B agisce sulla funzione con un cambio di scala rispetto all'asse x.

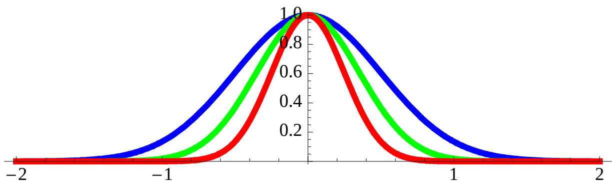


Figura 7: Grafico di $f(x) = e^{-2x^2}$ in blu, $f(x) = e^{-4x^2}$ in verde, $f(x) = e^{-8x^2}$ in rosso, nell'intervallo (-2, 2).

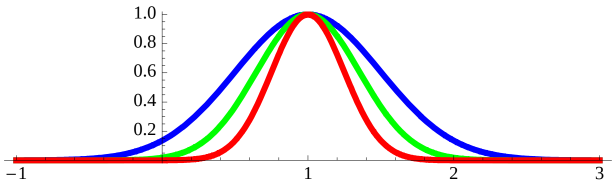


Figura 8: Grafico di $f(x) = e^{-2(x-1)^2}$ in blu, $f(x) = e^{-4(x-1)^2}$ in verde, $f(x) = e^{-8(x-1)^2}$ in rosso, nell'intervallo (-1, 3).

6 La funzione $f(x) = Ae^{-B(x-x_0)^2}$

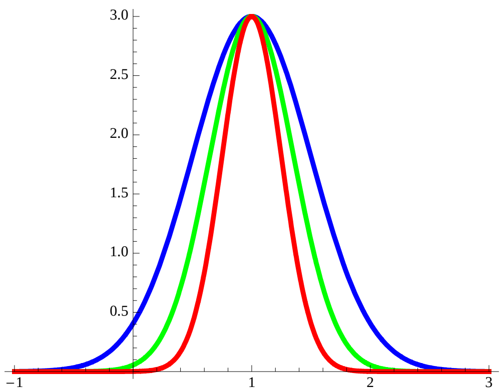


Figura 9: Grafico di $f(x) = 3e^{-2(x-1)^2}$ in blu, $f(x) = 3e^{-4(x-1)^2}$ in verde, $f(x) = 3e^{-8(x-1)^2}$ in rosso, nell'intervallo (-1, 3).

7 Applicazione

Alla curva gaussiana è legata l'idea di "curva per descrivere i dati". Quando si effettuano tante misurazioni di una stessa grandezza con un certo strumento, si avranno risultati differenti dovuti all'inevitabile imprecisizione sia dello strumento sia dell'operato della persona che utilizza lo strumento. Se si rappresentano le misure ottenute su un grafico, e se il numero di misurazioni è molto elevato, la curva che si ottiene è proprio la curva di Gauss. La curva ha un massimo attorno alla media dei valori misurati ed è più o meno stretta a seconda della dispersione dei valori attorno alla media. La dispersione si misura con la deviazione standard.

Si può dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

e che, più in generale,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-B(x-x_0)^2} dx = A\sqrt{\frac{\pi}{B}}.$$

Poichè risulta

$$A\sqrt{\frac{\pi}{B}} = 1 \Leftrightarrow A = \sqrt{\frac{B}{\pi}},$$

si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{B}{\pi}} e^{-B(x-x_0)^2} dx = 1.$$

In calcolo delle probabilità, si utilizzano spesso i simboli σ e μ al posto di B e x_0 rispettivamente, ponendo

$$x_0 = \mu, \qquad B = \frac{1}{2\sigma^2},$$

da cui si ha la distribuzione gaussiana di probabilità (1)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Questa distribuzione è utilizzata come prima approssimazione per descrivere variabili casuali a valori reali che tendono a concentrarsi attorno ad un singolo valor medio. Il valore μ è la media della distribuzione, il valore σ è la deviazione standard; inoltre, i valori $x = \mu \pm \sigma$ rappresentano le ascisse dei punti di flesso della funzione. La curva raggiunge in $x = \mu$ il valore massimo

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}},$$

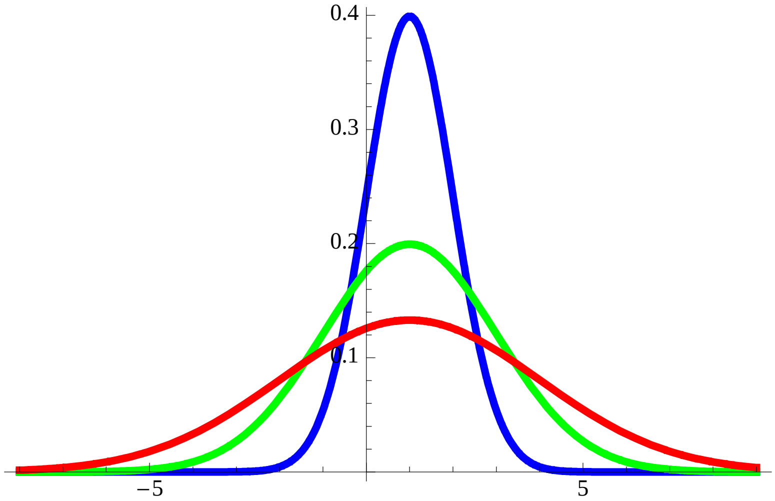


Figura 10: Grafico di $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{18}}$ in rosso, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$ in verde, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$ in blu, nell'intervallo (-8, 9).

che dipende da σ in modo inversamente proporzionale. Tracciamo diverse gaussiane relative a differenti valori di σ e con lo stesso valore di μ. Al diminuire di σ, la curva si contrae attorno al valor medio e si innalza. Una gaussiana con μ "grande", cioè abbastanza larga, sarà indice di una misura poco precisa; al contrario, se la distribuzione è molto addensata attorno al valor medio, la misura risulta molto precisa.

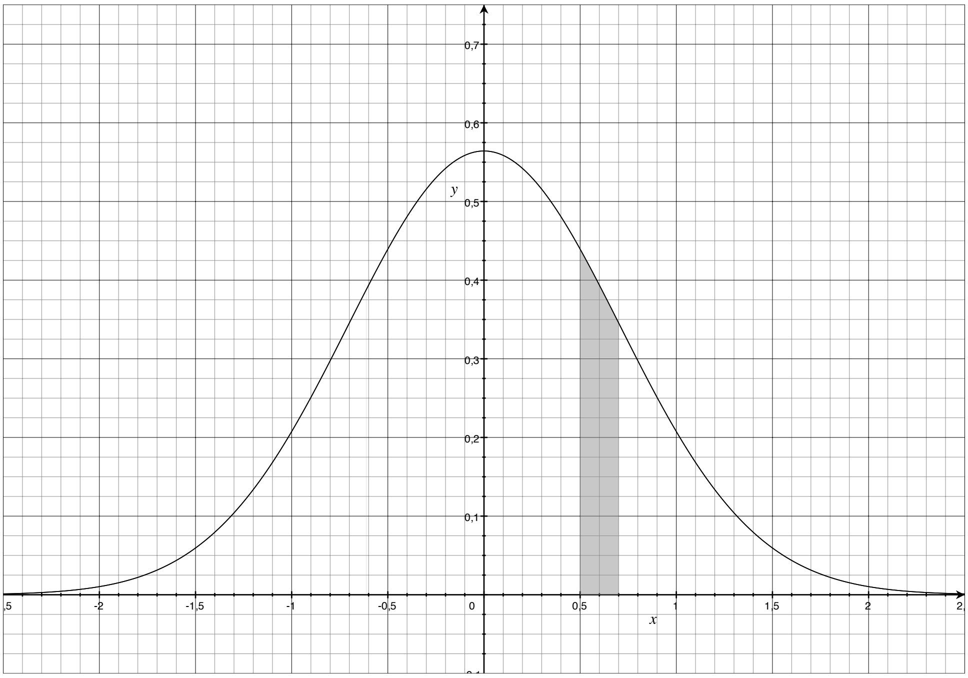
Prendiamo $\mu = 0$. Diamo una misura all'evento che un errore si trovi nell'intervallo (a, b) al seguente modo

$$M[x \in (a,b)] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Osserviamo che

$$M[x \in (-\infty, \infty)] = 1.$$

Considerando intervalli di ampiezza uguale (a, b) e (c, d), si evince che la probabilità di commettere errori piccoli è maggiore della probabalità di commettere errori grandi. Nelle seguenti figure abbiamo scelto gli intervalli $(0.5, 0.7)$ e $(1, 1.2)$. Possiamo vedere che l'area del sottografico nell'intervallo $(0.5, 0.7)$ è maggiore dell'area del sottografico nell'intervallo $(1, 1.2)$.



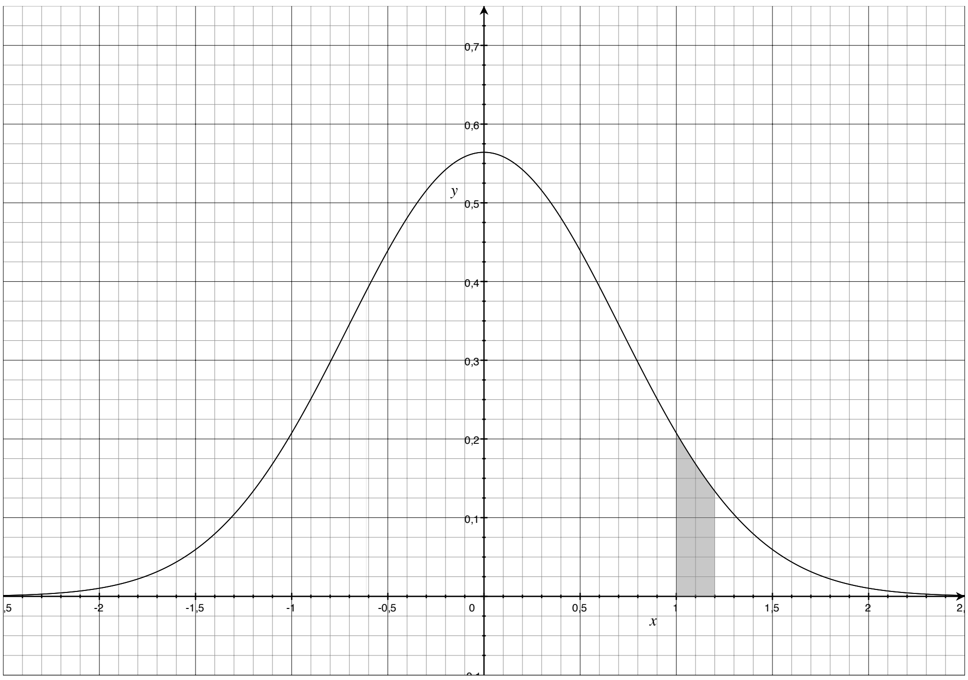


Figura 11: Grafici di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx$.

Calcolando numericamente il valore delle aree evidenziate in figura, risulta

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0.5}^{0.7} e^{-x^2} dx \approx 0.0787,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{1}^{1.2} e^{-x^2} dx \approx 0.0338.$$