Complementi del corso di Analisi Matematica II

Agresti Antonio

January 22, 2017

1 Indice

2 Calcolo di aree di figure piane

In questa sezione, calcoleremo alcune aree di figure piane, mediante le formule (1), (2) e (3); che sono una conseguenza delle formule di Gauss-Green nel piano. Fissiamo innanzitutto la notazione.
Sia A un dominio regolare di $\mathbf{R}^2$, indichiamo con $m(A)$ l'area racchiusa dal dominio, allora valgono le seguenti:

$$m(A) = \frac{1}{2}\int_{\partial A^+} x\ dy - y\ dx\ , \tag{1}$$

$$m(A) = \int_{\partial A^+} x\ dy\ , \tag{2}$$

$$m(A) = -\int_{\partial A^+} y\ dx\ , \tag{3}$$

dove con ∂A^+, indichiamo la frontiera di A orientata positivamente.
Nel caso in cui la frontiera di A sia parametrizzabile in coordinate polari, e quindi descrivibile da una funzione $\rho(\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, l'area può essere calcolata come

$$m(A) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta. \qquad (4)$$

La precedente sarà ricavata in seguito (vedi esercizio 2).

ESERCIZIO 1 - Calcolare l'area del rettangoloide R:

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | a < x < b \ , \ 0 < y < f(x)\}$$

dove $f(x)$ è una funzione continua positiva.

La frontiera ∂R è l'unione di quattro curve aperte, che indicheremo con γ_i con $i = 1, 2, 3, 4$. In particolare si ha:

$$\gamma_1^- : \ x = t \ , \ y = f(t) \ , \ t \in [a, b];$$

$$\gamma_2^- : \ x = a \ , \ y = t \ , \ t \in [0, f(a)];$$

$$\gamma_3^+ : \ x = t \ , \ y = 0 \ , \ t \in [a, b];$$

$$\gamma_4^+ : \ x = b \ , \ y = t \ , \ t \in [0, f(b)];$$

dove con il segno $\pm$ indica se il verso dell'orientazione, che induce il parametro t, crescente nell'intervallo indicato, è concorde rispetta a quella indotto da R.
Usando la (3), si ottiene:

$$m(A) = -\int_{\partial A^+} y \ dx = -\left[-\int_{\gamma_1^-} y \ dx - \int_{\gamma_2^-} y \ dx + \int_{\gamma_3^+} y \ dx + \int_{\gamma_4^+} y \ dx \right];$$

dove il segno $-$ all'interno della parentesi quadre, è presente perché la curva, su cui avviene l'integrazione, ha orientazione opposta a quella indotta da R.
L'integrale su γ_2^- e γ_4^+ risultano nulli poichè $dx = 0$, il secondo è nullo in quanto $y = 0$ su γ_3^+. Perciò abbiamo:

$$m(A) = \int_{\gamma_1^-} y \ dx = \int_a^b f(x) \ dx;$$

in accordo con la classica interpetrazione dell'integrale di funzioni continue e positive.

ESERCIZIO 2 - Calcolare l'area della figura piana A, racchiusa tra le seguenti curve:

$$\gamma_1^+ : \ x = t\cos\theta_1 \ , \ y = t\sin\theta_1 \ , \ t \in [0, \rho(\theta_1)];$$
$$\gamma_2^+ : \ x = \rho(\theta)\cos\theta \ , \ y = \rho(\theta)\sin\theta \ , \ t \in [\theta_1, \theta_2];$$
$$\gamma_3^- : \ x = t\cos\theta_2 \ , \ y = t\sin\theta_2 \ , \ t \in [0, \rho(\theta_2)];$$

dove $\rho(\theta)$ è una funzione assegnata.

In analogia con l'esercizio 1 il segno $\pm$, indica l'accordo o meno con il senso di percorrenza indotto dal parametro t, rispetto a quello indotto sulla frontiera dal dominio.
Dunque, useremo la (1) per il calcolo, ovvero

$$m(A) = \frac{1}{2}\left(\int_{\partial A^+} x\ dy - \int_{\partial A^+} y\ dx\right).$$

Calcoliamo separatamente i seguenti integrali:

$$\int_{\gamma_1^+} x\ dy - y\ dx = \int_0^{\rho(\theta_1)} (t\cos\theta_1\sin\theta_1 - t\sin\theta_1\cos\theta_1)\, dt = 0;$$

il calcolo dell'integrale su γ_3^-è analogo. Mentre

$$\int_{\gamma_2^+} x\ dy - y\ dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(\theta)\cos\theta\ d(\rho\sin\theta) - \rho(\theta)\sin\theta\ d(\rho\cos\theta)d\theta =$$

poichè $d(\rho\sin\theta) = \sin\theta\ d\rho + \rho\cos\theta\ d\theta$ e $d(\rho\cos\theta) = \cos\theta\ d\rho - \rho\sin\theta\ d\theta$.
Dunque, la precedente diventa:

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)d\theta.$$

Perciò, la (1) diventa

$$m(A) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)d\theta.$$

Notiamo che la (4) è un caso particolare della precedente, la si ottiene ponendo nella precedente $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$.

ESERCIZIO 3 - Calcolare l'area racchiusa dal primo arco di cicloide e l'asse x.

L'arco di cicloide è descrivibile mediante le seguenti:

$$\gamma_1^- : \; x(t) = r(t - \sin t), \; y(t) = r(1 - \cos t) \;\; t \in [0, 2\pi].$$

Poichè $x(2\pi) = 2\pi r$, $x(2\pi) = 0$, l'asse x, viene intersecato per questi due valori. Il segmento, giacente sull'asse x, che congiunge questi due punti, è parametrizzabile come:

$$\gamma_2^+ : \; x(t) = t \; , \; y(t) = 0, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Possiamo calcolare l'area usando la (3):

$$m(A) = + \int_{\gamma_1^-} y \; dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t) d(r(t - \sin t)) = \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos t)^2 dt;$$

poichè $y(t) = 0$ su γ_2^+. Inoltre vale

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t = \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)/2 = \pi;$$

si ha

$$m(A) = \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} r^2 (1 - 2\cos t + \cos^t) dt = 3\pi r^2.$$

3 Integrazione di forme differenziali

ESERCIZIO 1 - Calcolare l'integrale curvilineo del seguente forma differenziale

$$\omega = (x - z)dx + (1 - xy)dy + ydz;$$

lungo il segmento di estremi $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$. Successivamente, calcolare l'integrale lungo la curva

$$\psi : \; x(t) = t, \; y(t) = t^2, \; z(t) = t^3, \; t \in [0, 1].$$

Il segmento può essere parametrizzato come:

$$\gamma : \; x(t) = t, \; y(t) = t, \; z(t) = t, \; t \in [0, 1].$$

Dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 (t-t)dt + (1-t^2)dt + tdt =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

Nel secondo caso si ha:

$$\int_\psi \omega = \int_0^1 (t-t^3)dt + (1-t^3)(2t)dt + t^3(3t^2)dt =$$

$$= \int_0^1 (t^4 - t^3 + 3t)dt = \frac{29}{30}.$$

ESERCIZIO 2 - Calcolare l'integrale curvilineo del seguente forma differenziale

$$\omega = e^z dx + e^x dy + e^y dz;$$

lungo la curva

$$\gamma: \ x(t) = 1, \ y(t) = t, \ z(t) = e^t, \ t \in [0,1].$$

Analogamente al precedente esercizio, si ha:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 e^{z(t)} x'(t)dt + e^{x(t))} y'(t)dt + e^{y(t)} z'(t)dt =$$

$$= \int_0^1 (e + e^2 t)dt = \Big[et + \frac{e^{2t}}{2}\Big]_0^1 = e + \frac{e^2-1}{2}.$$

4 Massimi e minimi in domini limitati

ESERCIZIO 1 - Determinare il massimo e il minimo *assoluti* della funzione

$$f(x,y) = x^2 y + xy^2 - xy$$

nel dominio

$$T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}.$$

Il primo passo da fare, è la ricerca di eventuali punti critici, ovvero i punti in cui il gradiente si annulla:

$$f_x = 2xy + y^2 - y = 0 \qquad f_y = x^2 + 2xy - x = 0$$

ovvero

$$y(2x + y - 1) = 0 \qquad x(x + 2y - 1) = 0$$

da cui otteniamo l'esistenza di quattro punti critici. In ordine sono

$$y = 0, \qquad x = 0.$$

$$2x + y - 1 = 0, \qquad x = 0; \Rightarrow x = 0, y = 1.$$

$$y = 0, \qquad x + 2y - 1 = 0; \Rightarrow x = 1, y = 0.$$

$$2x + y - 1 = 0, \qquad x + 2y - 1 = 0; \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}.$$

Poniamo, per comodità $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (1, 0)$ e $P_4 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Si nota che i primi tre punti appartengono alla frontiera di T, dunque non dobbiamo calcolare l'Hessiana; mentre è necessaria per stabilire la natura di P_4.
Calcoliamo le derivate successive

$$f_{xx} = 2y; \quad f_{yy} = 2x; \quad f_{xy} = 2x + 2y - 1.$$

Valutandole in P_4 si ottiene

$$f_{xx}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}; \quad f_{yy}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}; \quad f_{xy}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Dunque il determinante dell'Hessiana vale

$$\det H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$$

ed

$$f_{xx}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) > 0;$$

implica che $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è definita positiva, dunque abbiamo un minimo relativo.
Inoltre

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}.$$

Andiamo ad analizzare l'andamento della funzione sulla frontiera. Innanzitutto notiamo che

$$\partial T = L_1 \cup L_2 \cup L_3$$

dove

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \ y = 0, 0 \le x \le 1\}.$$

$$L_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \ x = 0, 0 \le y \le 1\}.$$

$$L_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \ 0 \le y \le 1, x = 1 - y\}.$$

In altre parole L_1, L_2, L_3 sono i lati del triangolo. Si vede subito che

$$f(x, y) = 0 \qquad su \qquad L_1 \cup L_2.$$

Dunque, resta da studiare il comportamento di f su L_3

$$f(x, y)\Big|_{L_3} = f(1 - y, y) = (1 - y)^2 y + (1 - y)y^2 - (1 - y)y = 0.$$

Perciò concludiamo che il valore massimo assoluto di f in T è 0, e viene assunto in ogni punto $(x, y) \in \partial T$.
Il minimo assoluto è $-1/27$ e viene assunto nel punto P_4.

ESERCIZIO 2 - Determinare il massimo e il minimo *assoluti* della funzione

$$f(x, y) = |x|^{\frac{1}{4}} + |y|^{\frac{1}{4}}$$

nel dominio

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \ x^2 + y^2 \le 2\}.$$

Per ovvi motivi di simmetria, possiamo invece, studiare il comportamento della funzione in

$$I = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \ x^2 + y^2 \le 2, \ x \ge 0, \ y \ge 0\}.$$

Dunque se $(x, y) \in I$ si ha

$$f(x, y) = x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}.$$

I punti critici di f si ottengono come in precedenza:

$$f_x = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = 0 \qquad f_y = \frac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}} = 0.$$

Dunque, non ci sono punti critici (si noti la singolarità del gradiente nell'origine).

Analizziamo l'andamento sulla frontiera, notiamo che

$$\partial I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$$

dove

$$I_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \; y = 0, 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}.$$

$$I_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \; x = 0, 0 \leq y \leq \sqrt{2}\}.$$

$$I_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \; 0 \leq x \leq \sqrt{2}, \; 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}\}.$$

Su I_1:

$$f(x, y)\Big|_{I_1} = f(x, 0) = x^{\frac{1}{4}};$$

facendo la derivata otteniamo

$$\frac{d(f(x, 0))}{dx} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} > 0;$$

Si vede che $f(x, 0)$ è crescente in x, dunque i valori estremi sono

$$f(0, 0) = 0, \quad f(\sqrt{2}, 0) = \sqrt[8]{2}.$$

Analogamente si ottiene un risultato analogo per I_2. Mentre su I_3 si ha

$$f(x, y)\Big|_{I_3} = f(x, \sqrt{2 - x^2}) = x^{\frac{1}{4}} + (2 - x^2)^{\frac{1}{8}};$$

la cui derivata

$$\frac{d(f(x, \sqrt{2 - x^2}))}{dx} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{4}(2 - x^2)^{-\frac{7}{8}} x$$

$$= \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \left(1 - x^{\frac{7}{4}} (2 - x^2)^{-\frac{7}{8}}\right).$$

Studiamo il segno della derivata, è positiva, se

$$x^{\frac{7}{4}} (2 - x^2)^{-\frac{7}{8}} \leq 1$$

$$x^{\frac{7}{4}} \leq (2 - x^2)^{\frac{7}{8}} \;\; \Rightarrow \;\; x^2 \leq 2 - x^2;$$

$$x^2 \leq 1 \;\; \Rightarrow \;\; 0 \leq x \leq 1.$$

Ricordiamo che, essendo $(x,y) \in I_3$, si ha $0 \leq x \leq \sqrt{2}$.
Quindi, f su I_3 è crescente per $0 \leq x \leq 1$, e decrescente $1 \leq x \leq \sqrt{2}$. Dunque abbiamo un massimo in $(1,1)$, in quanto $y = \sqrt{2-x^2} = 1$ per $x = 1$. Inoltre

$$f(1,1) = 2.$$

Dunque il valore minimo assoluto in I è 0, assunto in $(0,0)$. Il valore massimo assoluto I è 2 assunto in $(1,1)$.

Ritornando al problema iniziale, si ha che il valore minimo assoluto in C è 0, assunto in $(0,0)$. Il valore massimo assoluto è 2 assunto in $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ ed$(-1,-1)$.

ESERCIZIO 3 - Determinare il massimo e il minimo *assoluti* della funzione

$$f(x,y) = x^3 + 3y^3 + x^2 y;$$

nel dominio

$$R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \; |x| \leq 1, \; |y| \leq 1\}.$$

I punti critici sono soluzione di

$$f_x = 3x^2 + 2xy = 0 \qquad f_y = 9y^2 + x^2 = 0 \tag{5}$$

si noti che

$$9y^2 + x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \; y = 0;$$

e dunque, essendo verificata anche la prima delle (5), si ha che $(0,0)$ è l'unico punto critico interno ad R.
Calcoliamo allora le derivate successive

$$f_{xx} = 6x + 2y, \quad f_{xy} = 2x, \quad f_{yy} = 18y;$$

si noti che la matrice Hessiana in $(0,0)$ è la matrice nulla. Dunque bisogna andare a vedere gli ordini successivi, poichè

$$f_{xxx}(0,0) = 6 > 0,$$

allora è un punto di sella.

Decomponiamo la frotiera come:

$$\partial R = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4;$$

dove

$$L_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \ y = 1, \ -1 \leq x \leq 1\}.$$

$$L_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \ y = -1, \ -1 \leq x \leq 1\}.$$

$$L_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \ x = 1, \ -1 \leq y \leq 1\}.$$

$$L_4 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \Big| \ x = -1, \ -1 \leq y \leq 1\}.$$

Su L_1, L_2, si ha:

$$f(x, \pm 1) = x^3 \pm (3 + x^2) \Rightarrow \frac{d(f(x, \pm 1))}{dx} = x(3x \pm 2).$$

si annulla per $x = 0$ e per $x = \mp 2/3$. In corrispondenza di tali valori, la funzione vale

$$f(0, \pm 1) = \pm 3, \quad f\left(\frac{2}{3}, -1\right) = -\frac{85}{27}, \quad f\left(-\frac{2}{3}, 1\right) = \frac{85}{27}.$$

Analogamente procediamo sui lati L_3, L_4, su cui la funzione vale

$$f(\pm 1, y) = \pm 1 + 3y^3 + y; \Rightarrow \frac{d(f(\pm 1, y))}{dy} = 9y^2 + 1 > 0;$$

la derivata risulta sempre positiva, dunque sui questi lati la funzione è crescente.
Perciò calcoliamo i valori agli estremi di L_3, L_4, ovvero i vertici del quadrato.

$$f(1,1) = 5, \quad f(1,-1) = -3, \quad f(-1,1) = 3, \quad f(-1,-1) = -5.$$

Risulta che il massimo assoluto è 5, assunto in $(1,1)$; il minimo assoluto è -5, assunto in $(-1,-1)$.

5 Calcolo di aree di superfici di rotazione

Richiamiamo il teorema di Guldino per le superfici di rotazione.

TEOREMA DI GULDINO - L'area A, della superficie generata dalla rotazione di un angolo α, di una curva regolare γ, è data dalla lunghezza della curva L, moltiplicata per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritta dalla rotazione baricentro della curva x_B. In formule, il teorema afferma

$$A = \alpha L x_B. \tag{6}$$

Ricordiamo che, assegnata una curva regolare $\gamma(t) = (x(t), z(t))$, parametrizzata rispetto al parametro $t \in [a, b]$. La lunghezza è data da

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2} dt;$$

il baricentro vale

$$x_B = \frac{1}{L} \int_\gamma x \, ds = \frac{1}{L} \int_a^b x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt.$$

Inserendo tali valori espliciti, per una curva regolare, la (6) diventa

$$A = \alpha \int_a^b x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt. \tag{7}$$

In alcuni casi, la precedente, risulta più semplice, in quanto non coinvolge la lunghezza della curva, talvolta difficile da calcolare.

ESERCIZIO 1 - (Toro). Il toro è la superficie generata dalla rotazione completa ($\alpha = 2\pi$), di una circonferenza rispetto ad un asse, che non la interseca. Più precisamente, un esempio di toro è dato dalla rotazione di

$$\gamma(t) = (R + r\cos t, r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad 0 < r < R;$$

intorno all'asse z.
Ovviamente $L = 2\pi r$. Calcoliamo il baricentro:

$$x_B = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} (R + r\cos t) r dt = R.$$

Dunque per la (6) si ha

$$A = 2\pi (2\pi r) R = 4\pi^2 R r.$$

ESERCIZIO 2 - (Sfera). La sfera è generata dalla rotazione completa di un suo meridiano rispetto all'asse z. Quindi possiamo scegliere

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

ovviamente $L = \pi r$. Inoltre

$$x_B = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}(r\cos t)r dt = \frac{1}{\pi r} r^2 \sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2r}{\pi}.$$

Dunque

$$A = 2\pi(\pi r)\frac{2r}{\pi} = 4\pi r^2.$$

ESERCIZIO 3 - (Paraboloide). Un paraboloide è generata dalla rotazione completa, di una parabola rispetto all'asse z. In particolare, possiamo assumere

$$\gamma(t) = (t, t^2); \quad t \in [0, \sqrt{h}].$$

dove l'altezza h è assegnata. Il calcolo della lunghezza, non è molto agevole, ma per il calcolo dell'area possiamo riferirci direttamente alla (7)

$$A = 2\pi\int_0^{\sqrt{h}} t\sqrt{1+4t^2}dt = \pi\frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{4}\Big|_0^{\sqrt{h}} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[(1+4h)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

OSSERVAZIONE: Il calcolo della lunghezza della parabola, porta al seguente integrale

$$\int_0^{\sqrt{h}} \sqrt{1+4t^2}dt;$$

che può essere calcolato mediante una sostituzione del tipo $2t = \sinh\xi$, e sfruttando le nota proprietà

$$\cosh^2\xi = 1 + \sinh^2\xi, \quad \forall\xi \in \mathbf{R}.$$

6 Integrazione sulla superficie sferica

La parametrizzazione standard della sfera di raggio R è:

$$P(\theta,\phi) = (R\cos\theta\sin\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\phi);$$

con $\phi \in [0,\pi], \theta \in [0, 2\pi]$. Dove ϕ, detto latitudine, è l'angolo che forma il vettore $\vec{OP}$ e il semiasse positivo delle z, oreintato in senso antiorario. Mentre θ, detto longitudine è l'angolo formato tra il semiasse positivo delle x e la proiezione di $\vec{OP}$ sul piano (x, y), orientato in senso antiorario.

Data una funzione f continua, definita in un intorno della sfera $S \subset \mathbf{R}^3$, definiamo

$$\int_S f(x,y,z)\, dS = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(P(\theta,\phi)) R^2 \sin\phi \, d\theta \right) d\phi. \tag{8}$$

Il motivo per cui compare il fattore $R^2 \sin\phi$ è di carattere analitico, tiene conto del fatto che vale la seguente

$$dS = \parallel \frac{\partial}{\partial\phi}\vec{OP} \times \frac{\partial}{\partial\theta}\vec{OP} \parallel d\phi d\theta.$$

Dopo alcuni calcoli si giunge alla seguente

$$dS = R^2 \sin\phi \; d\phi d\theta.$$

ESERCIZIO 1 - Calcolare l'integrale sulla sfera, della seguente funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2.$$

Applicando la riduzione in (8) si ha:

$$\int_S f(x,y,z)\, dS = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left[(R\cos\theta\sin\phi)^2 + (R\sin\theta\sin\phi)^2 \right] R^2 \sin\phi \; d\theta \right) d\phi =$$

$$R^4 \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left[\cos^2\theta + \sin^2\theta \right] \sin^3\phi \; d\theta \right) d\phi = 2\pi R^4 \int_0^{\pi} \sin^2\phi \; \sin\phi d\phi =$$

$$2\pi R^4 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\phi) \sin\phi d\phi;$$

con la sostituzione $t = cos\phi$, si ha $dt = -\sin\phi d\phi$, otteniamo

$$2\pi R^4 \int_{-1}^{1} dt(1-t^2)\; dt = 2\pi R^4 \left[2 - \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \right] = \frac{8}{3}\pi R^4.$$

7 Alcune identità sugli operatori differenziali

Prima di procedere allo svolgimento degli esempi, ricordiamo le principali definizioni e notazioni, riguardanti i tipici operatori presenti nel corso (gradiente, divergenza e rotore).
Con F indichiamo un campo vettoriale, F_1, F_2 ed F_3 sono le sue componenti rispetto alla base standard di $\mathbf{R}^3$.
Con f, g indichiamo funzioni a valori reali definite su un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$.
Tutte le funzioni sono sufficientemente regolari (ad esempio $F \in C^1$, $f \in C^2$).

DEFINIZIONI:

$$div F = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3};$$

$$\nabla f = (f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right);$$

$$curl F = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2}, -\frac{\partial F_1}{\partial x_3} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right);$$

dove $f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ ed analoghe.

ESEMPIO 1 - $curl(\nabla f) = 0$.

Dalle definizioni precedenti si ottiene:

$$curl(\nabla f) = \left(\frac{\partial f_{x_2}}{\partial x_3} - \frac{\partial f_{x_3}}{\partial x_2}, -\frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{x_3}}{\partial x_1}, \frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{x_2}}{\partial x_1} \right)$$

per il teorema di inversione di Schwartz, si ha che le precedenti derivate possono essere scambiate, dunque si ottiene il risultato.

ESEMPIO 2 - Calcolare $div(\nabla f)$.

Applicando le definzioni precedenti

$$div \nabla f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_{x_i}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}.$$

Tale operatore prende il nome di Laplaciano, ed è usualmente indicato con Δ o ∇^2.

ESERCIZIO 1 - Dimostrare la seguente identità

$$\Delta(fg) = \Delta(f)g + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\Delta(g).$$

La precedente è una banale conseguenza della regola di Leibnitz per la derivata di un prodotto:

$$\Delta(fg) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 (fg)}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} g + 2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right).$$

A questo punto per concludere, basta ricordare il prodotto scalare standard in $\mathbf{R}^3$. Infatti dati due vettori $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ed $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, il loro prodotto scalare vale

$$\xi \cdot \eta = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 = \sum_{i=1}^{3} \xi_i \eta_i.$$

ESERCIZIO 2 - Dimostrare la seguente identità

$$div(f\ F) = div(F) f + \nabla f \cdot F.$$

Analogamente alla precedente, applichiamo la regola di Leibnitz

$$div(f\ F) = divF = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (F_i\ f)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} f + \frac{\partial f}{\partial x_i} F_i \right);$$

da cui, ricordando il prodotto scalare in $\mathbf{R}^3$ si ottiene l'identità.

8 Il teorema della divergenza in $\mathbf{R}^3$

TEOREMA (GAUSS). Sia T un dominio regolare di $\mathbf{R}^3$, dato un campo vettoriale F di classe $C^1(T) \cap C(\bar{T})$, si ha

$$\int_T divF\ dxdydz = \int_{\partial T} F \cdot \nu\ d\sigma; \tag{9}$$

dove ν è il versore normale esterno al dominio, e $d\sigma$ l'elemento di superficie su ∂T.

ESERCIZIO 1 - Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (xz, y, 0);$$

attraverso la superficie sferica S di raggio R, centrata nell'origine.

L'esercizio richiede il calcolo di

$$\int_S F \cdot \nu\ d\sigma;$$

Notiamo che il dominio

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \Big|\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\};$$

soddisfa $\partial B = S$. Perciò possiamo applicare il teorema della divergenza sul dominio B ed ottenere ciò che richiede l'esercizio.
Per quanto detto

$$\int_S F \cdot \nu\ d\sigma = \int_B divF\ dxdydz.$$

A questo punto, calcoliamo la divergenza:

$$divF = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = z + 1.$$

Quindi

$$\int_B (z+1) dxdydz = \int_C \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\ dz \right) dxdy + \int_B 1 dxdydz.$$

Avendo integrato per "fili", e $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \Big|\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$.
Si noti che

$$\int_C \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\ dz \right) dxdy = \int_C \left(\frac{z^2}{2} \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \right) dxdy = 0$$

Mentre si ha che

$$\int_B 1 dxdydz$$

è pari al volume della sfera, dunque possiamo concludere che:

$$\int_S F \cdot \nu \, d\sigma = \int_B divF \; dxdydz = \int_B 1 dxdydz = \frac{4}{3}\pi R^3.$$