METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE: APPUNTI 2016-2017

PAOLA LORETI

1. Elementi di topologia di $\mathbb{R}^m$

Ricordiamo che per $x, y \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietá

- $|x| \geq 0$
- $x \neq 0$ se e solo se $|x| > 0$
- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x-y|$

1.1. **Norma.** $\mathbb{R}^m$ con $p > 1$. La formula

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_m|^p)^{1/p}.$$

definisce una norma in $\mathbb{R}^m$. (da dimostrare più tardi tramite la disuguaglianza di Young, Holder, Minkowski).

Occorre verificare che valgono le seguenti proprietà $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

1.2. **Il prodotto scalare.** Il prodotto scalare in $\mathbb{R}^m$ è un numero reale dato da

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m \qquad \text{per ogni } x, y, z \ \in \mathbb{R}^m \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Occorre verificare che valgono le seguenti proprietà

$$x \cdot y = y \cdot x, \qquad (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \qquad \lambda(x \cdot y) = \lambda x \cdot y.$$

$$(x, x) = \|x\|^2$$

Esempio 1.1.

- *La formula*

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_m|, \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

definisce una norma su $\mathbb{R}^m$. Infatti dimostriamo la disuguaglianza triangolare

$$\|x+y\|_1 = |x_1 + y_1| + \cdots + |x_m + y_m| \leq= |x_1| + |y_1| \cdots + |x_m| + |y_m|$$

$$= \|x\|_1 + \|y\|_1$$

- *La formula*

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\}$$

definisce una norma su $\mathbb{R}^m$.

$$\|x+y\|_\infty = \max\{|x_1+y_1|, \ldots, |x_m+y_m|\} \le \max\{|x_i|\} + \max\{|y_i|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Vale la relazione

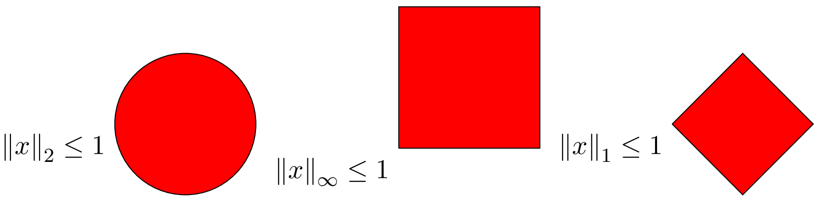
$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

Sfruttando la relazione tra le norme, valida per ogni $p \ge 1$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le m^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

1.3. **Intorni.** Disegnare gli intorni

$$\|x\|_2 \le 1 \quad \|x\|_\infty \le 1 \quad \|x\|_1 \le 1$$



Gli esempi appena visti sono casi particolari di una teoria molto importante. Ricordiamo alcune nozioni fondamentali

1.4. **Spazi vettoriali.** Uno spazio vettoriale su un campo K è un insieme V dotato di due operazioni binarie, dette somma e moltiplicazione per scalare, caratterizzate da determinate proprietà

Gli elementi di V sono detti vettori e quelli di K scalari. Le operazioni sono:

-una somma dati due vettori u, v la somma fornisce un altro vettore indicato con $u + v$,

$$(u, v) \to u + v$$

-un prodotto per scalare che dato un vettore v e uno scalare λ fornisce un altro vettore indicato con λv .

$$(\lambda, v) \to \lambda v$$

Gli assiomi che queste due operazioni devono soddisfare sono i seguenti[

L'insieme V con la somma è un gruppo abeliano:

la somma è commutativa e associativa,

esiste quindi un elemento neutro 0,

ogni vettore v ha un opposto che è normalmente indicato con $-v$;

$$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall \lambda \in K \ \forall u, v \in V$$

$$(\lambda + \lambda_1)v = \lambda v + \lambda_1 v \quad \forall \lambda, \lambda_1 \in K \ \forall v \in V$$

$$(\lambda \lambda_1)v = \lambda(\lambda_1 v) \quad \forall \lambda, \lambda_1 \in K \ \forall v \in V$$

$$1v = v \ \forall v \in V$$

Esempio $\mathbb{R}^m$ su $\mathbb{R}$.

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_m)$$

Sia V uno spazio vettoriale, un sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale se è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di V.

$$\forall \lambda, \lambda_1 \in K, \ \forall u, v \in V \implies \lambda u + \lambda_1 v \in W$$

Notazione $V(K)$, V su K

1.5. **Spazi normati.** Uno spazio vettoriale $X(\mathbb{R})$ munito di norma si chiama spazio vettoriale normato o semplicemente spazio normato. $\forall x, y, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valgono le proprietà:

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

1.6. **Disuguaglianza di Young.** Dato $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$ diciamo coniugato di p il numero reale q tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 1.2. *Disuguaglianza di Young (esponenti reali): dati due numeri reali positivi a e b, e dati p, q numeri reali coniugati, si ha*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Proof. Fissiamo $b > 0$

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - tb$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - tb = +\infty$$

$$f(0) = \frac{b^q}{q} > 0$$

$$f'(t) = t^{p-1} - b$$

$$t^{p-1} = b \iff t = b^{\frac{1}{p-1}}$$

$$f''(b^{\frac{1}{p-1}}) > 0$$

Punto di minimo relativo che è anche punto di minimo assoluto

$$f(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} b^q - b^{\frac{1}{p-1}} b = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) b^q = 0$$

Allora risulta per ogni numero reale $a \geq 0$

$$f(a) \geq 0,$$

ossia

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

□

Teorema 1.3 (disuguaglianza di Hölder)**.** *Per p, q esponenti coniugati e $p, q \in [1, +\infty)$ e $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ abbiamo*

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{1.1}$$

Si fissi

$$a_i = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}, \qquad b_i = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$$

Dalla disuguaglianza di Young

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

Sommando

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leq \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{m}|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^{m}|y_i|^q}{\|y\|_q^q} = 1$$

Da cui si evince

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{|x_i|}{\|x\|_p}\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq 1$$

e la disuguaglianza di Hölder segue

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{1.2}$$

Teorema 1.4 (Disuguaglianza Minkowski)**.** *Per* $p \in [1, +\infty)$ *e* $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^m$ *abbiamo*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{1.3}$$

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \leq$$
$$|x_i + y_i|^{p-1}(|x_i| + |y_i|)$$

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|$$

Si ha

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| \leq \|x\|_p \|(x+y)^{(p-1)}\|_q = \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|y_i| \leq \|y\|_p \|(x+y)^{(p-1)}\|_q = \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Quindi da $(p-1)q = p$

$$\|x + y\|_p^p \leq \|x + y\|_p^{p-1}(\|x\|_p + \|y\|_p)$$

e dividendo per $\|x + y\|_p^{p-1}$ (assumendo non nullo) si ottiene la Disuguaglianza di Minkowski

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Esempio. $\mathbb{R}^m(\mathbb{R})$ dotato della norma euclidea di x. Dato un punto $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\|x\|_2 = \left(x_1^2 + \cdots + x_m^2\right)^{1/2}.$$

Due norme $\|x\|_a$ $\|x\|_b$ si dicono equivalenti se esistono due costanti m e M tali che

$$m\,\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq M\,\|x\|_b\,.$$

Si ha che le norme p per $p \geq 1$ sono tra loro equivalenti.

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

calcolare la derivata direzionale di f nel punto (1,2) lungo la direzione del versore $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Calcolare il minimo e il massimo assoluti di f nella regione D delimitata dal trapezio di vertici

$$(1, 2), (-1, 2), (1/4, 1/2), (-1/4, 1/2),$$

compresi i lati

Risposta $f_v = -\sqrt{2}$ $\quad m = -4,\ M = -3/16.$

Esercizio 2. Data la funzione $f(x, y) = x - y$ determinare minimi e massimi assoluti nell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \leq x \leq 1,\ -2 \leq y \leq 2\}$$

Risposta m=-3, M=3.

Esercizio 3. Data la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$ determinare minimi e massimi assoluti nel cerchio unitario

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Risposta $m = -\sqrt{2},\ M = \sqrt{2}.$

Sia V uno spazio vettoriale. Una norma su V è una funzione che a ogni vettore x di V associa un numero reale $\|x\|$ $\forall x, y, z \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Esempio $\mathbb{R}^m$

Definizione 1.5. *Definiamo la* distanza *tra due punti di* $\mathbb{R}^m$ *tramite la formula*

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$$

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

La base canonica in $\mathbb{R}^N$ è data da $e^1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $e^m = (0, 0, \ldots, 1)$.

$$e^j = (0, \ldots 1, 0 \ldots 0)$$
$$e^k = (0, \ldots 0, 1 \ldots 0).$$
$$d(e^j, e^k) = \sqrt{2} \qquad j \neq k$$

$\mathbb{R}^m$ con la norma euclidea è un esempio di uno spazio metrico

$$(X, d)$$

X insieme e d la metrica

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ogni spazio normato è uno spazio metrico, dove la distanza tra due punti x, y è data dalla norma del vettore $x - y$. In questi casi si dice che la metrica d è indotta dalla norma. Osserviamo che la metrica indotta da una norma ha in più le proprietà che non sono necessariamente vere in uno spazio metrico:

Invarianza per traslazioni

$$d(x + w, y + w) = d(x, y)$$

Riscalamento :

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$$

Non vale però il viceversa, esistono cioè spazi metrici la cui metrica d non può derivare da una norma, come mostra l'esempio: L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, con la distanza data da

$$d(x,y) = \frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan y|$$

La funzione è ben definita e positiva a valori in $[0,1)$

$$0 \leq \frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan y| \leq \frac{1}{\pi}|\arctan x| + |\arctan y| < \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 1.$$

La proprietà

$$\arctan x = \arctan y \iff x = y$$

segue dall'iniettività della funzione arctan.

La simmetria

$$d(x,y) = \frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan y| = \frac{1}{\pi}|\arctan y - \arctan x| = d(y,x)$$

è verificata.

Vale la disuguaglianza triangolare

$$d(x,y) = \frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan y| = \frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan z + \arctan z - \arctan y| \leq$$

$$\frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan z| + \frac{1}{\pi}|\arctan z - \arctan y| = d(x,z) + d(z,y)$$

La palla aperta unitaria in $(\mathbb{R}, d)$ con $d(x,y) = \frac{1}{\pi}|\arctan x - \frac{1}{\pi}\arctan y|$

$$B_1(x,0) = x : \frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan 0| < 1 \iff |\arctan x| < \pi \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

dunque coincide con $\mathbb{R}$.

Vale

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y) \quad \forall x,y,z \in X$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sulle due disuguaglianze

$$d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y) \;\; d(x,y) \geq -(d(x,z) - d(y,z)$$

Segue dalla disuguaglianza triangolare

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

$$d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$$

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$$

$$-d(y,x) \leq d(x,z) - d(y,z)$$

$$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y),$$

e dunque il risultato.

Definiamo l'intorno sferico (circolare) di centro x_0 e raggio r

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^m \;: d(x,x_0) < r\}\,.$$

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ si dice aperto se ogni suo punto è centro di un intorno circolare interamente contenuto in A. In simboli

$$\forall x_0 \in A \; \exists r > 0 : \; B_r(x_0) \subset A$$

L'insieme di tutti gli aperti si chiama topologia generata dalla metrica.

Proposizione 1. *In uno spazio metrico ogni intorno circolare è un insieme aperto, ogni unione di aperti è un aperto, l'intersezione di due aperti è un aperto.*

Infatti $\forall x_0 \in B_r(x_0) \exists r_1 : B_{r_1} \subset B_r(x_0)$. Fissiamo

$$r_1 = r - d(x,x_0)$$

allora da

$$d(y,x) < r_1 \implies d(y,x_0) \leq d(y,x) + d(x,x_0) < r - d(x,x_0) + d(x,x_0) = r$$

ovvero $y \in B_r(x_0)$. Dimostriamo ora che ogni unione di aperti è un aperto, Consideriamo una famiglia A_i di aperti. Sia $x \in \cup A_i$.

$x \in \cup A_i$ se $\exists i$ tale che $x \in A_i$. Essendo A_i un aperto $\exists r > 0$ tale che

$$B_r(x) \subset A_i \subseteq \cup A_i$$

2. Convergenza

2.1. Successioni.

Definizione 2.1. *Una successione* (x_n) $x_n \in \mathbb{R}^m$ *è* convergente, *se esiste un punto* $a \in \mathbb{R}^m$, *detto* limite *della successione tale che* $\|x_n - a\| \to 0$ *per* $n \to \infty$.

Diremo anche che (x_n) converge *ad* a, *e scriviamo*

$$x_n \to a \quad \text{anche } \lim x_n = a$$

.

Esempio 2.2.

- *Per* $m = 1$ *si ha la nozione di convergenza per successioni reali*

Definizione 2.3. *Una successione* (x_n) $x_n \in \mathbb{R}^m$ *è una successione di Cauchy se* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu > 0$ *tale che* $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, $\forall n, m > \nu$

Equivalentemente

Definizione 2.4. *Una successione* (x_n) $x_n \in \mathbb{R}^m$ *è una successione di Cauchy se* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu > 0$ *tale* $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$, $\forall n > \nu$, $\forall p \in \mathbb{N}$

(Caratterizzazione della convergenza). Sia (x_n) $x_n \in \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$ scriviamo

$$x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nm}) \quad \text{e} \quad a = (a_1, \ldots, a_m).$$

Allora $x_n \to a$ in $\mathbb{R}^m$ $\iff$ $x_{nk} \to a_k$ in $\mathbb{R}$, per ciascuna componente k. $k = 1, \ldots, m$.

In $\mathbb{R}^m$ non valgono più i risultati che fanno uso della monotonia.

Proposizione 2. *Siano* $(x_n)(, y_n)$ *due successioni con* $x_n, y_n \in \mathbb{R}^m$*e* $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$.

- *Il limite di una successione convergente è unico : se* $x_n \to a$ *e* $x_n \to b$, *allora* $a = b$.
- *Se* $x_n \to a$, *allora* $x_{n_k} \to a$ *per ogni sottosuccessione* (x_{n_k}) *della successione* (x_n).
- *Se* $x_n \to a$ *e* $y_n \to b$, *allora* $x_n + y_n \to a + b$.
- *Se* $\lambda_n \to \lambda$ *(in* $\mathbb{R}$*) e* $x_n \to a$ *(in* $\mathbb{R}^m$*), allora* $\lambda_n x_n \to \lambda a$ *(in* $\mathbb{R}^m$*).*
- *Se* $x_n \to a$ *(in* $\mathbb{R}^m$*), allora* $\|x_n\| \to \|a\|$ *(in* $\mathbb{R}$*).*

Definizione 2.5. *Una successione* (x_n) $x_n \in \mathbb{R}^m$ *è* limitata, *se esiste* $L \in \mathbb{R}$ *tale che* $\|x_n\| < L$ *per ogni* n.

Tutte le successioni convergenti sono limitate e vale

Teorema 2.6. *(Bolzano–Weierstrass)Tutte le successioni limitate di* $\mathbb{R}^m$ *ammettono una sottosuccessione convergente*

2.2. Spazi di Banach.

Lo spazio di Banach è uno spazio normato completo (ogni successione di Cauchy è convergente a un elemento dello spazio) rispetto alla metrica indotta dalla norma.

Esercizio 1

Dimostrare

$$|xy| \leq \frac{\epsilon}{2}x^2 + \frac{y^2}{2\epsilon}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$$

Si ha

$$0 \leq (\epsilon x \pm y)^2 = \epsilon^2 x^2 + y^2 \pm 2\epsilon xy,$$

si divide poi per 2ϵ.

Esercizio 2

Dimostrare

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

$$\|x+y\|^2 = \sum_{k=1}^{N}(x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^{N} x_k^2 + \sum_{k=1}^{N} y_k^2 + 2\sum_{k=1}^{N} x_k y_k =$$
$$= \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2$$

Esercizio 3

Dimostrare

$$|x \cdot y| \leq \frac{\epsilon}{2}\|x\|^2 + \frac{\|y\|^2}{2\epsilon} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \epsilon > 0$$

Si ha

$$0 \leq \left\|\epsilon x \pm y^2\right\| = \epsilon^2\left\|x^2\right\| + \left\|y^2\right\| \pm 2\epsilon x \cdot y,$$

si divide poi per 2ϵ.

Esercizio 4

Nel caso $N = 2$, dimostrare che la posizione seguente

$$\|x\|_{1/2} = (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2$$

non definisce una norma. (prendere i punti $(0, 1/4)$ e $(1/4, 0)$, si trova che non è verificata la disuguaglianza triangolare.

2.3. **Interno, Esterno, Frontiera di un insieme.**

Definizione 2.7. *Sia $a \in \mathbb{R}^m$ e $r > 0$ un numero reale. $B_r(a)$ di centro a e raggio r per*

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^m \ : \ \|x - a\| < r\}\,.$$

- Per $m = 1$ troviamo gli intervalli $]a - r, a + r[$.
- Per $m = 2$ troviamo il cerchio privato dei suoi punti frontiera
- Per $m = 3$ troviamo la palla privata dei suoi punti frontiera

Sia $A \subset \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^m$.

- x è un *punto interno* di A se esiste $r > 0$ tale $B_r(x) \subset A$.
- x è un *punto esterno* di A se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$.
- x è un *punto frontiera* di A se $B_r(x)$ incontra A e $\mathbb{R}^m \setminus A$ per ogni $r > 0$.

L'insieme dei punti interni esterni e di frontiera si chiama *interno*, *esterno* e la *frontiera* dia A, e si denota con $int(A)$, $ext(A)$ e ∂A. Si utilizza anche la notazione A° invece di $int(A)$.

Sia $A \subset \mathbb{R}^m$.

- Gli insiemi $int(A)$, $ext(A)$, ∂A formano una *partizione* di $\mathbb{R}^m$: sono disgiunti e la loro riunione fornisce $\mathbb{R}^m$.

2.4. **Insiemi aperti, chiusi, compatti.**

Definizione 2.8. *Sia $X \subset \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^m$. Si dice che il punto x è di aderenza per X se la palla $B_r(x)$ incontra X per ogni $r > 0$. L'insieme dei punti x con questa proprietà si chiama aderenza di X e si denota con $\overline{X}$.*

Proposizione 3. *Sia $X \subset \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^m$, allora*

$$x \in \overline{X} \iff \exists\,(x_n) \subset X \,\text{e}\, x_n \to x$$

Definizione 2.9. *Sia $X \subset \mathbb{R}^m$. Si dice che X è un insieme aperto se per ogni $x \in X$ se esiste $r > 0$ tale che la palla $B_r(x)$ è interamente contenuta in X.*

Dati due punti distinti di $\mathbb{R}^m$ x e y esistono due aperti X e Y tali che $x \in X$ $y \in X$ e $X \cap Y = \emptyset$.

Proposizione 4. *$\emptyset$ e $\mathbb{R}^m$ sono aperti. L' unione qualsiasi di insiemi aperti è un insieme aperto. L'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.*

Definizione 2.10. *Un insieme X è chiuso se l'insieme complementare in $\mathbb{R}^m$ è aperto*

$\overline{X}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene X.

Proposizione 5. *$\emptyset$ e $\mathbb{R}^m$ sono chiusi. L'unione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso. L'intersezione qualunque di insiemi chiusi è un insieme chiuso .*

Definizione 2.11. *K è limitato $\iff$ esiste una costante L tale che $\|x\| < L$ per ogni $x \in K$*

Il diametro di K è definito come

$$diam(K) = \sup\{d(x,y), x, y \in K\}.$$

Se $diam(K) = +\infty$ diremo che K è illimitato.

Definizione 2.12. *K è compatto se $\forall (x_n) \subset X$ esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) con $\lim x_{n_k} \in X$*

Teorema 2.13. (**Teorema di Heine-Borel**) *K compatto di $\mathbb{R}^m \iff K$ è chiuso e limitato*

L'intersezione infinita di una famiglia infinita di aperti può non essere aperta. Esempio $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. L'intersezione $\{0\}$: un insieme chiuso.

$\emptyset$ e $\mathbb{R}^m$ sono gli unici insiemi che sono sia aperti che chiusi.

Ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi, ad esempio gli intervalli di $\mathbb{R}$ a cui appartiene un solo estremo.

2.5. **Funzioni.** A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^m$.

Lemma 2.14. *Sia $f : A \to \mathbb{R}^n$ e $a \in A$*

Le due proprietà seguenti sono equivalenti

(a) *$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $\|x - a\| < \delta$, allora*

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

(b) *(x_n) $x_n \in A$ e $x_n \to a$, allora $f(x_n) \to f(a)$.*

f è continua in A se é continua in ogni punto $a \in A$, ossia
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $\|x - a\| < \delta$, allora $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

2.6. **Teorema di Weierstrass.** Una funzione continua in un compatto ammette minimo e massimo assoluto.

Definizione della derivata di f in $\overline{x}$

Definizione 2.15.

$$f_{x_i}(\overline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i + h, \ldots, \overline{x}_m) - f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_m)}{h},$$

se tale limite esiste finito.

Definizione 2.16. *Definizione del gradiente di f.*

$$Df(x) = (f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x))$$

Definizione del Laplaciano di f.

Definizione 2.17. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$*

$$f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i}$$

Δ è l'operatore di Laplace o Laplaciano.

Esempio 2.18. *Calcolare il gradiente di f per*

i) $f(x) = \|x\|^2$
ii) $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|$
iii) *per* $n \geq 3$ $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|^{2-n}$

i) r1 $f(x) = \|x\|^2$ $f_{x_i} = 2x_i$
ii) r2 $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|$ $f_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{2x_i}{\|x\|} = \frac{x_i}{\|x\|}$
iii) r3 per $n \geq 3$ $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|^{2-n}$
$f_{x_i} = (2-n)\|x\|^{1-n}\frac{x_i}{\|x\|} = (2-n)\frac{x_i}{\|x\|^n}$

Esempio 2.19. *Calcolare il Laplaciano di f per*

i) $f(x) = \|x\|^2$
ii) $f(x) = \|x\|$
iii) *per* $n \geq 3$ $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|^{2-n}$

i) r1 $f(x) = \|x\|^2$ $f_{x_i} = 2x_i$ $f_{x_ix_i} = 2$ $\Delta \|x\|^2 = 2n$
ii) r2 $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|$ $f_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{2x_i}{\|x\|} = \frac{x_i}{\|x\|}$

$$f_{x_ix_i} = \frac{1}{\|x\|} + \frac{x_i^2}{\|x\|^2}$$

$$\Delta \|x\| = n\frac{1}{\|x\|} + 1$$

iii) r3 per $n \geq 3$ $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|^{2-n}$
$f_{x_i} = (2-n)\|x\|^{1-n}\frac{x_i}{\|x\|} = (2-n)\frac{x_i}{\|x\|^n}$
$f_{x_ix_i} = (2-n)\frac{1}{\|x\|^n} - n(2-n)x_i^2\|x\|^{-n-2}$

$$\Delta \|x\|^{2-n} = (2-n)n\frac{1}{\|x\|^n} - (2-n)n\frac{1}{\|x\|^n} = 0$$

2.7. **Principio del massimo per le funzioni armoniche.** Sia Ω un insieme aperto e limitato. Sia $f \in C^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Una funzione armonica soddisfa l'equazione di Laplace

$$\Delta f = 0$$

Osserviamo che somma e differenza di funzioni armoniche sono funzioni armoniche. Sia

$$M = \max\{f(x), x \in \partial\Omega\}$$
$$m = \min\{f(x), x \in \partial\Omega\},$$

e f una funzione armonica.

Si ha

Principio del massimo per le funzioni armoniche

$$m \leq f(x) \leq M \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Dimostremo

$$f(x) \leq M \quad x \in \overline{\Omega}.$$

La dimostrazione è basata sullo studio della funzione

$$g_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon \|x\|^2 \quad x \in \overline{\Omega}.$$

$g_\epsilon(x) \in C^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$,

$$\Delta g_\epsilon(x) = \Delta f(x) + 2\epsilon n > 0$$

Allora non ci sono punti di massimo relativi interni per g_ϵ, perché in tali punti x_ϵ il Laplaciano $\Delta g_\epsilon(x_\epsilon) \leq 0$ (in dettaglio il caso $n = 2$). Allora se $x \in \overline{\Omega}$ si ha

$$g_\epsilon(x) \leq \max\{f(x) + \epsilon \|x\|^2, x \in \partial\Omega\}.$$

Ricordando che $\overline{\Omega}$ è limitato per ipotesi, si ha che esiste un numero reale L tale che

$$\|x\| \leq L \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Se $x \in \overline{\Omega}$

$$g_\epsilon(x) \leq \max\{f(x) + \epsilon L^2, x \in \partial\Omega\} = M + \epsilon L^2,$$

ossia

$$f(x) + \epsilon \|x\|^2 \leq M + \epsilon L^2.$$

Il risultato segue per $\epsilon \to 0$.

Svolgere

$$m \leq f(x) \quad x \in \overline{\Omega},$$

considerando la funzione

$$g_\epsilon(x) = f(x) - \epsilon \|x\|^2 \quad x \in \overline{\Omega}.$$