METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE: APPUNTI 2016-2017

PAOLA LORETI

1. Elementi di topologia di $\mathbb{R}^m$

Ricordiamo che per $x, y \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietá

- $|x| \geq 0$
- $x \neq 0$ se e solo se $|x| > 0$
- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

1.1. **Norma.** $\mathbb{R}^m$ con $p > 1$. La formula

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_m|^p)^{1/p} .$$

definisce una norma in $\mathbb{R}^m$. (da dimostrare più tardi tramite la disuguaglianza di Young, Holder, Minkowski).

Occorre verificare che valgono le seguenti proprietà $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

1.2. **Il prodotto scalare.** Il prodotto scalare in $\mathbb{R}^m$ è un numero reale dato da

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m \qquad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}^m \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Occorre verificare che valgono le seguenti proprietà

$$x \cdot y = y \cdot x, \qquad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \qquad \lambda(x \cdot y) = \lambda x \cdot y.$$

$$(x, x) = \|x\|^2$$

Esempio 1.1.

- *La formula*

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_m| , \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

definisce una norma su $\mathbb{R}^m$. Infatti dimostriamo la disuguaglianza triangolare

$$\|x + y\|_1 = |x_1 + y_1| + \cdots + |x_m + y_m| \leq= |x_1| + |y_1| \cdots + |x_m| + |y_m|$$

$$= \|x\|_1 + \|y\|_1$$

- *La formula*

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\}$$

definisce una norma su $\mathbb{R}^m$.

$$\|x+y\|_\infty = \max\{|x_1+y_1|, \ldots, |x_m+y_m|\} \le \max\{|x_i|\} + \max\{|y_i|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Vale la relazione

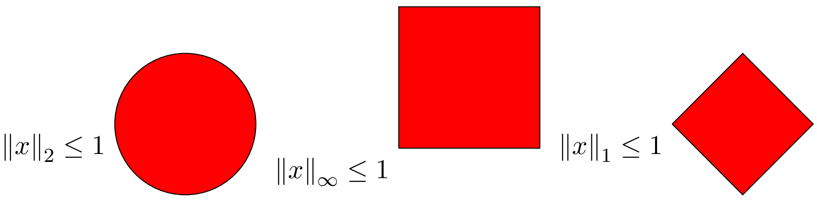
$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

Sfruttando la relazione tra le norme, valida per ogni $p \ge 1$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le m^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

1.3. **Intorni.** Disegnare gli intorni

$$\|x\|_2 \le 1 \quad \|x\|_\infty \le 1 \quad \|x\|_1 \le 1$$



Gli esempi appena visti sono casi particolari di una teoria molto importante. Ricordiamo alcune nozioni fondamentali

1.4. **Spazi vettoriali.** Uno spazio vettoriale su un campo K è un insieme V dotato di due operazioni binarie, dette somma e moltiplicazione per scalare, caratterizzate da determinate proprietà

Gli elementi di V sono detti vettori e quelli di K scalari. Le operazioni sono:

-una somma dati due vettori u, v la somma fornisce un altro vettore indicato con $u + v$,

$$(u, v) \to u + v$$

-un prodotto per scalare che dato un vettore v e uno scalare λ fornisce un altro vettore indicato con λv .

$$(\lambda, v) \to \lambda v$$

Gli assiomi che queste due operazioni devono soddisfare sono i seguenti[

L'insieme V con la somma è un gruppo abeliano:

la somma è commutativa e associativa,

esiste quindi un elemento neutro 0,

ogni vettore v ha un opposto che è normalmente indicato con $-v$;

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall \lambda \in K \; \forall u, v \in V$$

$$(\lambda + \lambda_1)v = \lambda v + \lambda_1 v \quad \forall \lambda, \lambda_1 \in K \; \forall v \in V$$

$$(\lambda \lambda_1)v = \lambda(\lambda_1 v) \quad \forall \lambda, \lambda_1 \in K \; \forall v \in V$$

$$1v = v \; \forall v \in V$$

Esempio $\mathbb{R}^m$ su $\mathbb{R}$.

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_m)$$

Sia V uno spazio vettoriale, un sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale se è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di V.

$$\forall \lambda, \lambda_1 \in K, \; \forall u, v \in V \implies \lambda u + \lambda_1 v \in W$$

Notazione $V(K)$, V su K

1.5. **Spazi normati.** Uno spazio vettoriale $X(\mathbb{R})$ munito di norma si chiama spazio vettoriale normato o semplicemente spazio normato. $\forall x, y, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valgono le proprietà:

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

1.6. **Disuguaglianza di Young.** Dato $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$ diciamo coniugato di p il numero reale q tale che
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 1.2. *Disuguaglianza di Young (esponenti reali): dati due numeri reali positivi a e b, e dati p, q numeri reali coniugati, si ha*
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Dimostrazione 1.1. *Fissiamo $b > 0$*
$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$
$$f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - tb$$
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - tb = +\infty$$
$$f(0) = \frac{b^q}{q} > 0$$
$$f'(t) = t^{p-1} - b$$
$$t^{p-1} = b \iff t = b^{\frac{1}{p-1}}$$
$$f''(b^{\frac{1}{p-1}}) > 0$$
Punto di minimo relativo che è anche punto di minimo assoluto
$$f(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} b^q - b^{\frac{1}{p-1}} b = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) b^q = 0$$
Allora risulta per ogni numero reale $a \geq 0$
$$f(a) \geq 0,$$
ossia
$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

Teorema 1.3 (disuguaglianza di Hölder)**.** *Per p, q esponenti coniugati e $p, q \in [1, +\infty)$ e $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ abbiamo*
$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{1.1}$$

Si fissi
$$a_i = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}, \qquad b_i = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$$

Dalla disuguaglianza di Young
$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

Sommando

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^{m} |y_i|^q}{\|y\|_q^q} = 1$$

Da cui si evince

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq 1$$

e la disuguaglianza di Hölder segue

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{1.2}$$

Teorema 1.4 (Disuguaglianza Minkowski)**.** *Per* $p \in [1, +\infty)$ *e* $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^m$ *abbiamo*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{1.3}$$

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \leq$$
$$|x_i + y_i|^{p-1}(|x_i| + |y_i|)$$

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|$$

Si ha

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| \leq \|x\|_p \|(x + y)^{(p-1)}\|_q = \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{m} \ |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|y_i| \leq \|y\|_p \|(x + y)^{(p-1)}\|_q = \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Quindi da $(p - 1)q = p$

$$\|x + y\|_p^p \leq \|x + y\|_p^{p-1}(\|x\|_p + \|y\|_p)$$

e dividendo per $\|x + y\|_p^{p-1}$ (assumendo non nullo) si ottiene la Disuguaglianza di Minkowski

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Esempio. $\mathbb{R}^m(\mathbb{R})$ dotato della norma euclidea di x. Dato un punto $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\|x\|_2 = \left(x_1^2 + \cdots + x_m^2\right)^{1/2}.$$

Due norme $\|x\|_a$ $\|x\|_b$ si dicono equivalenti se esistono due costanti m e M tali che

$$m\,\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq M\,\|x\|_b\,.$$

Si ha che le norme p per $p \geq 1$ sono tra loro equivalenti.

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

calcolare la derivata direzionale di f nel punto (1,2) lungo la direzione del versore $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Calcolare il minimo e il massimo assoluti di f nella regione D delimitata dal trapezio di vertici

$$(1, 2), (-1, 2), (1/4, 1/2), (-1/4, 1/2),$$

compresi i lati

Risposta $f_v = -\sqrt{2}$ $\quad m = -4, \ M = -3/16.$

Esercizio 2. Data la funzione $f(x, y) = x - y$ determinare minimi e massimi assoluti nell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 1, \ -2 \leq y \leq 2\}$$

Risposta m=-3, M=3.

Esercizio 3. Data la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$ determinare minimi e massimi assoluti nel cerchio unitario

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Risposta $m = -\sqrt{2}, \ M = \sqrt{2}.$

Sia V uno spazio vettoriale. Una norma su V è una funzione che a ogni vettore x di V associa un numero reale $\|x\|$ $\forall x, y, z \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Esempio $\mathbb{R}^m$

Definizione 1.5. *Definiamo la* distanza *tra due punti di* $\mathbb{R}^m$ *tramite la formula*

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$$

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

La base canonica in $\mathbb{R}^N$ è data da $e^1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $e^m = (0, 0, \ldots, 1)$.

$$e^j = (0, \ldots 1, 0 \ldots 0)$$
$$e^k = (0, \ldots 0, 1 \ldots 0).$$
$$d(e^j, e^k) = \sqrt{2} \qquad j \neq k$$

$\mathbb{R}^m$ con la norma euclidea è un esempio di uno spazio metrico

$$(X, d)$$

X insieme e d la metrica

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ogni spazio normato è uno spazio metrico, dove la distanza tra due punti x, y è data dalla norma del vettore $x - y$. In questi casi si dice che la metrica d è indotta dalla norma. Osserviamo che la metrica indotta da una norma ha in più le proprietà che non sono necessariamente vere in uno spazio metrico:

Invarianza per traslazioni

$$d(x + w, y + w) = d(x, y)$$

Riscalamento :

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$$

Non vale però il viceversa, esistono cioè spazi metrici la cui metrica d non può derivare da una norma, come mostra l'esempio: L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, con la distanza data da

$$d(x,y) = \frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan y|$$

La funzione è ben definita e positiva a valori in $[0,1)$

$$0 \leq \frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan y| \leq \frac{1}{\pi}|\arctan x| + |\arctan y| < \frac{1}{\pi}\big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\big) = 1.$$

La proprietà

$$\arctan x = \arctan y \iff x = y$$

segue dall'iniettività della funzione arctan.

La simmetria

$$d(x,y) = \frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan y| = \frac{1}{\pi}|\arctan y - \arctan x| = d(y,x)$$

è verificata.

Vale la disuguaglianza triangolare

$$d(x,y) = \frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan y| = \frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan z + \arctan z - \arctan y| \leq$$

$$\frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan z| + \frac{1}{\pi}|\arctan z - \arctan y| = d(x,z) + d(z,y)$$

La palla aperta unitaria in $(\mathbb{R}, d)$ con $d(x,y) = \frac{1}{\pi}|\arctan x - \frac{1}{\pi}\arctan y|$

$$B_1(x,0) = x : \frac{1}{\pi}|\arctan x - \arctan 0| < 1 \iff |\arctan x| < \pi \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

dunque coincide con $\mathbb{R}$.

Vale
$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y) \quad \forall x,y,z \in X$$
Dimostrazione. La dimostrazione si basa sulle due disuguaglianze
$$d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y) \;\; d(x,y) \geq -(d(x,z) - d(y,z)$$
Segue dalla disuguaglianza triangolare
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$
$$d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$$

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$$
$$-d(y,x) \leq d(x,z) - d(y,z)$$

$$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y),$$
e dunque il risultato.

Definiamo l'intorno sferico (circolare) di centro x_0 e raggio r
$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^m \;: d(x,x_0) < r\}\,.$$
Un insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ si dice aperto se ogni suo punto è centro di un intorno circolare interamente contenuto in A. In simboli
$$\forall x_0 \in A\ \exists r > 0 : \; B_r(x_0) \subset A$$
L'insieme di tutti gli aperti si chiama topologia generata dalla metrica.

Proposizione 1. *In uno spazio metrico ogni intorno circolare è un insieme aperto, ogni unione di aperti è un aperto, l'intersezione di due aperti è un aperto.*

Infatti $\forall x_0 \in B_r(x_0) \exists r_1 : B_{r_1} \subset B_r(x_0)$. Fissiamo
$$r_1 = r - d(x,x_0)$$
allora da
$$d(y,x) < r_1 \implies d(y,x_0) \leq d(y,x) + d(x,x_0) < r - d(x,x_0) + d(x,x_0) = r$$
ovvero $y \in B_r(x_0)$. Dimostriamo ora che ogni unione di aperti è un aperto, Consideriamo una famiglia A_i di aperti. Sia $x \in \cup A_i$.

$x \in \cup A_i$ se $\exists i$ tale che $x \in A_i$. Essendo A_i un aperto $\exists r > 0$ tale che
$$B_r(x) \subset A_i \subseteq \cup A_i$$

2. Convergenza

2.1. Successioni.

Definizione 2.1. *Una successione* (x_n) $x_n \in \mathbb{R}^m$ *è* convergente, *se esiste un punto* $a \in \mathbb{R}^m$, *detto* limite *della successione tale che* $\|x_n - a\| \to 0$ *per* $n \to \infty$.

Diremo anche che (x_n) converge *ad* a, *e scriviamo*

$$x_n \to a \quad \text{anche } \lim x_n = a$$

.

Esempio 2.2.

- *Per* $m = 1$ *si ha la nozione di convergenza per successioni reali*

Definizione 2.3. *Una successione* (x_n) $x_n \in \mathbb{R}^m$ *è una successione di Cauchy se* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu > 0$ *tale che* $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, $\forall n, m > \nu$

Equivalentemente

Definizione 2.4. *Una successione* (x_n) $x_n \in \mathbb{R}^m$ *è una successione di Cauchy se* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu > 0$ *tale* $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$, $\forall n > \nu$, $\forall p \in \mathbb{N}$

(Caratterizzazione della convergenza). Sia (x_n) $x_n \in \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$ scriviamo

$$x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nm}) \quad \text{e} \quad a = (a_1, \ldots, a_m).$$

Allora $x_n \to a$ in $\mathbb{R}^m$ $\iff$ $x_{nk} \to a_k$ in $\mathbb{R}$, per ciascuna componente k. $k = 1, \ldots, m$.

In $\mathbb{R}^m$ non valgono più i risultati che fanno uso della monotonia.

Proposizione 2. *Siano* $(x_n)(, y_n)$ *due successioni con* $x_n, y_n \in \mathbb{R}^m$*e* $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$.

- *Il limite di una successione convergente è unico : se* $x_n \to a$ *e* $x_n \to b$, *allora* $a = b$.
- *Se* $x_n \to a$, *allora* $x_{n_k} \to a$ *per ogni sottosuccessione* (x_{n_k}) *della successione* (x_n).
- *Se* $x_n \to a$ *e* $y_n \to b$, *allora* $x_n + y_n \to a + b$.
- *Se* $\lambda_n \to \lambda$ *(in* $\mathbb{R}$*) e* $x_n \to a$ *(in* $\mathbb{R}^m$*), allora* $\lambda_n x_n \to \lambda a$ *(in* $\mathbb{R}^m$*).*
- *Se* $x_n \to a$ *(in* $\mathbb{R}^m$*), allora* $\|x_n\| \to \|a\|$ *(in* $\mathbb{R}$*).*

Definizione 2.5. *Una successione* (x_n) $x_n \in \mathbb{R}^m$ *è* limitata, *se esiste* $L \in \mathbb{R}$ *tale che* $\|x_n\| < L$ *per ogni* n.

Tutte le successioni convergenti sono limitate e vale

Teorema 2.6. *(Bolzano–Weierstrass)Tutte le successioni limitate di* $\mathbb{R}^m$ *ammettono una sottosuccessione convergente*

2.2. Spazi di Banach.

Lo spazio di Banach è uno spazio normato completo (ogni successione di Cauchy è convergente a un elemento dello spazio) rispetto alla metrica indotta dalla norma.

Esercizio 1

Dimostrare

$$|xy| \leq \frac{\epsilon}{2}x^2 + \frac{y^2}{2\epsilon}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$$

Si ha

$$0 \leq (\epsilon x \pm y)^2 = \epsilon^2 x^2 + y^2 \pm 2\epsilon xy,$$

si divide poi per 2ϵ.

Esercizio 2

Dimostrare

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

$$\|x+y\|^2 = \sum_{k=1}^{N}(x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^{N} x_k^2 + \sum_{k=1}^{N} y_k^2 + 2\sum_{k=1}^{N} x_k y_k =$$
$$= \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2$$

Esercizio 3

Dimostrare

$$|x \cdot y| \leq \frac{\epsilon}{2}\|x\|^2 + \frac{\|y\|^2}{2\epsilon} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \epsilon > 0$$

Si ha

$$0 \leq \left\|\epsilon x \pm y^2\right\| = \epsilon^2 \left\|x^2\right\| + \left\|y^2\right\| \pm 2\epsilon x \cdot y,$$

si divide poi per 2ϵ.

Esercizio 4

Nel caso $N = 2$, dimostrare che la posizione seguente

$$\|x\|_{1/2} = (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2$$

non definisce una norma. (prendere i punti $(0, 1/4)$ e $(1/4, 0)$, si trova che non è verificata la disuguaglianza triangolare.

2.3. **Interno, Esterno, Frontiera di un insieme.**

Definizione 2.7. *Sia $a \in \mathbb{R}^m$ e $r > 0$ un numero reale. $B_r(a)$ di centro a e raggio r per*
$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^m \ : \ \|x - a\| < r\}\,.$$

- Per $m = 1$ troviamo gli intervalli $]a - r, a + r[$.
- Per $m = 2$ troviamo il cerchio privato dei suoi punti frontiera
- Per $m = 3$ troviamo la palla privata dei suoi punti frontiera

Sia $A \subset \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^m$.

- x è un *punto interno* di A se esiste $r > 0$ tale $B_r(x) \subset A$.
- x è un *punto esterno* di A se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$.
- x è un *punto frontiera* di A se $B_r(x)$ incontra A e $\mathbb{R}^m \setminus A$ per ogni $r > 0$.

L'insieme dei punti interni esterni e di frontiera si chiama *interno*, *esterno* e la *frontiera* dia A, e si denota con $int(A)$, $ext(A)$ e ∂A. Si utilizza anche la notazione A° invece di $int(A)$.

Sia $A \subset \mathbb{R}^m$.

- Gli insiemi $int(A)$, $ext(A)$, ∂A formano una *partizione* di $\mathbb{R}^m$: sono disgiunti e la loro riunione fornisce $\mathbb{R}^m$.

2.4. **Insiemi aperti, chiusi, compatti.**

Definizione 2.8. *Sia $X \subset \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^m$. Si dice che il punto x è di aderenza per X se la palla $B_r(x)$ incontra X per ogni $r > 0$. L'insieme dei punti x con questa proprietà si chiama aderenza di X e si denota con $\overline{X}$.*

Proposizione 3. *Sia $X \subset \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^m$, allora*

$$x \in \overline{X} \iff \exists\,(x_n) \subset X \,\mathrm{e}\, x_n \to x$$

Definizione 2.9. *Sia $X \subset \mathbb{R}^m$. Si dice che X è un insieme aperto se per ogni $x \in X$ se esiste $r > 0$ tale che la palla $B_r(x)$ è interamente contenuta in X.*

Dati due punti distinti di $\mathbb{R}^m$ x e y esistono due aperti X e Y tali che $x \in X$ $y \in X$ e $X \cap Y = \emptyset$.

Proposizione 4. $\emptyset$ *e* $\mathbb{R}^m$ *sono aperti. L' unione qualsiasi di insiemi aperti è un insieme aperto. L'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.*

Definizione 2.10. *Un insieme X è chiuso se l'insieme complementare in $\mathbb{R}^m$ è aperto*

$\overline{X}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene X.

Proposizione 5. $\emptyset$ *e* $\mathbb{R}^m$ *sono chiusi. L'unione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso. L'intersezione qualunque di insiemi chiusi è un insieme chiuso .*

Definizione 2.11. *K è limitato $\iff$ esiste una costante L tale che $\|x\| < L$ per ogni $x \in K$*

Il diametro di K è definito come

$$diam(K) = \sup\{d(x,y), x, y \in K\}.$$

Se $diam(K) = +\infty$ diremo che K è illimitato.

Definizione 2.12. *K è compatto se $\forall (x_n) \subset X$ esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) con $\lim x_{n_k} \in X$*

Teorema 2.13. *(***Teorema di Heine-Borel)** *K compatto di $\mathbb{R}^m \iff K$ è chiuso e limitato*

L'intersezione infinita di una famiglia infinita di aperti può non essere aperta. Esempio $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. L'intersezione $\{0\}$: un insieme chiuso.

$\emptyset$ e $\mathbb{R}^m$ sono gli unici insiemi che sono sia aperti che chiusi.

Ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi, ad esempio gli intervalli di $\mathbb{R}$ a cui appartiene un solo estremo.

2.5. **Funzioni.** A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^m$.

Lemma 2.14. *Sia $f : A \to \mathbb{R}^n$ e $a \in A$*

Le due proprietà seguenti sono equivalenti

(a) *$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $\|x - a\| < \delta$, allora*

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

(b) *(x_n) $x_n \in A$ e $x_n \to a$, allora $f(x_n) \to f(a)$.*

f è continua in A se é continua in ogni punto $a \in A$, ossia $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $\|x - a\| < \delta$, allora $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

2.6. **Teorema di Weierstrass.** Una funzione continua in un compatto ammette minimo e massimo assoluto.

Definizione della derivata di f in $\overline{x}$

Definizione 2.15.

$$f_{x_i}(\overline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i + h, \dots, \overline{x}_m) - f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i, \dots, \overline{x}_m)}{h},$$

se tale limite esiste finito.

Definizione 2.16. *Definizione del gradiente di f.*

$$Df(x) = (f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x))$$

Definizione del Laplaciano di f.

Definizione 2.17. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$*

$$f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i}$$

Δ è l'operatore di Laplace o Laplaciano.

Esempio 2.18. *Calcolare il gradiente di f per*

i) $f(x) = \|x\|^2$
ii) $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|$
iii) *per* $n \geq 3$ $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|^{2-n}$

i) r1 $f(x) = \|x\|^2$ $f_{x_i} = 2x_i$
ii) r2 $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|$ $f_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{2x_i}{\|x\|} = \frac{x_i}{\|x\|}$
iii) r3 per $n \geq 3$ $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|^{2-n}$
$f_{x_i} = (2-n)\|x\|^{1-n}\frac{x_i}{\|x\|} = (2-n)\frac{x_i}{\|x\|^n}$

Esempio 2.19. *Calcolare il Laplaciano di f per*

i) $f(x) = \|x\|^2$
ii) $f(x) = \|x\|$
iii) *per* $n \geq 3$ $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|^{2-n}$

i) r1 $f(x) = \|x\|^2$ $f_{x_i} = 2x_i$ $f_{x_ix_i} = 2$ $\Delta\|x\|^2 = 2n$
ii) r2 $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|$ $f_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{2x_i}{\|x\|} = \frac{x_i}{\|x\|}$

$$f_{x_ix_i} = \frac{1}{\|x\|} + \frac{x_i^2}{\|x\|^2}$$

$$\Delta\|x\| = n\frac{1}{\|x\|} + 1$$

iii) r3 per $n \geq 3$ $x \neq 0$ $f(x) = \|x\|^{2-n}$
$f_{x_i} = (2-n)\|x\|^{1-n}\frac{x_i}{\|x\|} = (2-n)\frac{x_i}{\|x\|^n}$
$f_{x_ix_i} = (2-n)\frac{1}{\|x\|^n} - n(2-n)x_i^2\|x\|^{-n-2}$

$$\Delta\|x\|^{2-n} = (2-n)n\frac{1}{\|x\|^n} - (2-n)n\frac{1}{\|x\|^n} = 0$$

2.7. **Principio del massimo per le funzioni armoniche.** Sia Ω un insieme aperto e limitato. Sia $f \in C^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Una funzione armonica soddisfa l'equazione di Laplace

$$\Delta f = 0$$

Osserviamo che somma e differenza di funzioni armoniche sono funzioni armoniche. Sia

$$M = \max\{f(x), x \in \partial\Omega\}$$
$$m = \min\{f(x), x \in \partial\Omega\},$$

e f una funzione armonica.

Si ha

Principio del massimo per le funzioni armoniche

$$m \leq f(x) \leq M \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Dimostremo

$$f(x) \leq M \quad x \in \overline{\Omega}.$$

La dimostrazione è basata sullo studio della funzione

$$g_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon \|x\|^2 \quad x \in \overline{\Omega}.$$

$g_\epsilon(x) \in C^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$,

$$\Delta g_\epsilon(x) = \Delta f(x) + 2\epsilon n > 0$$

Allora non ci sono punti di massimo relativi interni per g_ϵ, perché in tali punti x_ϵ il Laplaciano $\Delta g_\epsilon(x_\epsilon) \leq 0$ (in dettaglio il caso $n = 2$). Allora se $x \in \overline{\Omega}$ si ha

$$g_\epsilon(x) \leq \max\{f(x) + \epsilon \|x\|^2, x \in \partial\Omega\}.$$

Ricordando che $\overline{\Omega}$ è limitato per ipotesi, si ha che esiste un numero reale L tale che

$$\|x\| \leq L \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Se $x \in \overline{\Omega}$

$$g_\epsilon(x) \leq \max\{f(x) + \epsilon L^2, x \in \partial\Omega\} = M + \epsilon L^2,$$

ossia

$$f(x) + \epsilon \|x\|^2 \leq M + \epsilon L^2.$$

Il risultato segue per $\epsilon \to 0$.

Svolgere

$$m \leq f(x) \quad x \in \overline{\Omega},$$

considerando la funzione

$$g_\epsilon(x) = f(x) - \epsilon \|x\|^2 \quad x \in \overline{\Omega}.$$

3. Il teorema di Weierstrass in spazi metrici

Definizione 3.1. *Un sottoinsieme K dello spazio metrico X, d si dice compatto se da ogni successione x_k di punti di K si può estrarre una sottosuccessione convergente verso un punto $x \in K$*

Definizione 3.2. *Sia (X, d_X) e (Y, d_y) due spazi metrici. $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se $\forall x_k \subset X \to x_0$ (ossia $d_X(x_k, x_0) \to 0$), risulta $f(x_k) \to f(x_0)$ (ossia $d_Y(f(x_k), f(x_0)) \to 0$).*

f è continua in X se è continua in ogni punto di X.

Sia K un sottoinsieme compatto dello spazio metrico X, d e sia $f : K \to \mathbb{R}$. Allora

Definizione 3.3. *Un punto x_0 del sottoinsieme K dello spazio metrico (X, d) è di massimo assoluto per la funzione f se*

$$\forall x \in K \;\; f(x) \leq f(x_0)$$

Un punto x_0 del sottoinsieme K dello spazio metrico (X, d) è di minimo assoluto per la funzion f se

$$\forall x \in K \;\; f(x) \geq f(x_0)$$

Teorema 3.4. *Sia K un sottoinsieme compatto dello spazio metrico (X, d) e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è dotata di minimo e massimo assoluti su K.*

Dimostrazione 3.1. *Consideriamo dapprima la dimostrazione che f è dotata di massimo assoluto su K. Occore dimostrare che detto*

$$M = \sup\{f(x) : \ x \in K\},$$

allora

$$M \neq +\infty$$

e

$$\exists x_0 \in K : f(x_0) = M$$

Come primo punto verifichiamo che esiste una successione x_k in K tale che

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = M$$

Se $M \neq +\infty$ segue dalla proprietà del sup

$$\forall k \ \ \exists x_k \in K : \ M - \frac{1}{k} < f(x_k) \leq M$$

Se $M = +\infty$

$$\forall k \ \exists x_k \in K : f(x_k) > k$$

In ogni caso $f(x_k) \to M$.

K è un insieme compatto quindi possiamo estrarre una sottosuccessione convergente a un elemento $x_0 \in K$: $f(x_{k_h}) \to f(x_0)$ per la continuità di f.

$$M = \lim_{k \to +\infty} f(x_k) = \lim_{h \to +\infty} f(x_{k_h}) = f(x_0)$$

$M \neq +\infty$ e

$$\exists x_0 \in K : f(x_0) = M.$$

Analogamente per stabilire l'esistenza del punto di minimo.

3.1. **Funzione Distanza.** Consideriamo la funzione distanza di $x \in \mathbb{R}^N$

$$dist_K(x) = \inf_{y \in K} \|x - y\| . \tag{3.1}$$

$\|x - y\|$: si tratta di una funzione continua, K è un insieme compatto, come applicazione del teorema di Weierstrass, abbiamo che il minimo è assunto. Allora per qualche $y^* \in K$.

$$dist_K(x) = \|x - y^*\|$$

$dist_K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la funzione distanza di $x \in \mathbb{R}^N$ dall'insieme compatto K è allora definita

$$dist_K(x) = \min_{y \in K} \|x - y\| .$$

Vale 0 in K.

Proposizione 6. *Sia K un insieme compatto. Allora $dist_K$ è Lipschitz continua*

$$\left|dist_K(x) - dist_K(x')\right| \leq \left\|x - x'\right\| \ \ \forall x, x' \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione 3.2. *$dist_K(x') = x' - \hat{y}$ per qualche $\hat{y} \in K$ allora*

$$dist_K(x) - dist_K(x') \leq \|x - \hat{y}\| - \left\|x' - \hat{y}\right\| \leq \left\|x - x'\right\|.$$

La dimostrazione segue scambiando il ruolo di x and x'.

Vale il seguente risultato di separazione. Siano X e Y sono due insieme compatti non vuoti e disgiunti di $\mathbb{R}^m$. Allora

$$f(x) = \frac{dist(x, X)}{dist(x, X) + dist(x, Y)}$$

verifica

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in X \\ 1 & x \in Y \end{cases},$$

ossia f separa X e Y

3.2. **Esempio con uso del moltiplicatore di Lagrange.** Ricordiamo che

- La condizione al primo ordine non distingue massimi, minimi o punti di sella
- Nel caso di funzioni $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ possiamo calcolare i massimi e minimi assoluti della funzione f confrontando i valori della funzione tra punti interni in cui si annulla il gradiente e il massimo e il minimo valore della funzione sulla frontiera.

Breve introduzione nel caso $N = 2$.

Equazione del vincolo. Sia g una funzione regolare.

$$V = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$$

Assumiamo che V sia il sostegno di una curva regolare semplice γ di equazioni parametriche

$$x = x(t), \ \ y = y(t), t \in I$$

Supponiamo che $t_0 = (x_0, y_0)$ sia un punto di massimo o minimo relativo per la funzione ϕ

$$\phi(t_0) = f(x_1(t_0), x_2(t_0))$$

$$\phi'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0) = 0$$

In corrispondenza di un massimo o di un minimo relativo per f il gradiente di f deve essere ortogonale alla curva $\gamma = (x(t), y(t))$ (ricordiamo $V = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ e V sostegno di una curva regolare semplice γ)

Si può dimostrare il seguente

Teorema 3.5. *Siano f e g funzioni $C^1(A)$ con A aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia (x_0, y_0) un punto regolare per V. Allora (x_0, y_0) è un punto stazionario vincolato a V se e sole se $\exists$ un numero reale λ_0 tale che*

$$Df(x_0, y_0) + \lambda_0 Dg(x_0, y_0)$$

Definiamo

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

La funzione L si chiama funzione Lagrangiana. Dipende anche dalla variabile λ, che prende il nome di moltiplicatore di Lagrange. Risolveremo il sistema

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

L'ultima equazione è l'equazione del vincolo e il sistema diventa

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.6. *Tra tutti i rettangoli inscritti nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ trovare quello di area massima.*

Possiamo calcolare con un metodo di sostituzione ($2x$, $2y$ semi-lato)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \iff y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Segue

$$f(x) = 4xy = \frac{4b}{a} x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$f'(x) = \frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = 0$$

Si ricava $x = a/\sqrt{2}$, $y = b/\sqrt{2}$ $\;f(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}) = 2ab$

Esercizio 3.7. *Tra tutti i rettangoli inscritti nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ trovare quello di area massima.*

($2x$, $2y$ semi-lato)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

In forma parametrica

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \;\; t \in [0, \pi/2] \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases}$$

$$\phi(t) = 4ab\cos(t)\sin(t) = 2ab\sin(2t) \;\; t \in [0, \pi/2]$$

$$\phi'(t) = 0 \iff \sin(2t) = 0 \;\; t \in [0, \pi/2]$$
$$\phi(\pi/4) = 2ab \;\; \phi(0) = \phi(\pi/2) = 0$$

3.2.1. *Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.*

$$\begin{cases} \max_{x,y} 4xy \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x > 0, \;\; y > 0 \end{cases}$$

$$L(x, y, \lambda) = \max_{x,y} 4xy + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1)$$

Si calcolano i punti stazionari della funzione L

$$\begin{cases} 4y + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ \\ 4x + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Si ricava dalla prima equazione

$$\lambda = -\frac{2a^2 y}{x}$$

Sostituendo e semplificando

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \\ \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2},$$

la cui soluzione positiva è

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Dunque

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 3.8. *Tra tutti i parallelepipedi retti a base rettangolare inscritti in un ellissoide di equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

determinare quello di volume massimo.

Se x, y, z indicano i semispigoli si tratta di massimizzare la funzione

$$f(x,y,z) = 8xyz,$$

soggetta al vincolo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, con $x > 0, y > 0, z > 0$.

Il problema può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \max_{x,y,z} 8xyz \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases}$$

3.3. **Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.**

$$\begin{cases} \max_{x,y,z} 8xyz \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

$$L(x,y,z,\lambda) = \max_{x,y,z} 8xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

Si calcolano i punti stazionari della funzione L

$$\begin{cases} 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Si ricava dalla prima equazione

$$\lambda = -\frac{4a^2yz}{x}$$

$$\begin{cases} 8x^2zb^2 - 8a^2y^2z = 0 \\ 8x^2yc^2 + 8yz^2a^2 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Semplificando

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \\ \frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{3},$$

la cui soluzione positiva è

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Dunque

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad y = \frac{b}{\sqrt{3}} \qquad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Esercizio 3.9. *Siano $a_i > 0$ $\forall i = 1, \dots, N$. Massimizzare la funzione*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = 2^N \prod_{i=1}^{N} x_i,$$

sotto la condizione

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1, \ \ x_i > 0 \ \forall i = 1, \dots, N$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda) = \max_{x_i} 2^N \prod_{i=1}^{N} x_i + \lambda(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{a_i^2} - 1)$$

Si calcolano i punti stazionari della funzione L

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda)}{\partial x_k} = 2^N \prod_{i=1, i \neq k}^{N} x_i + \frac{2\lambda x_k}{a_k^2} = 0 \ \ k = 1, \dots, N$$

Si ricava dalla prima equazione ($k = 1$)

$$\lambda = -\frac{2^{N-1} a_1^2 \prod_{i=2}^{N} x_i}{x_1}$$

Sostituendo in tutte le altre

$$2^N a_k^2 x_1^2 \prod_{i=2, i \neq k}^{N} x_i - 2^N x_k a_1^2 \prod_{i=2}^{N} x_i = 0 \ \ k = 2, \dots, N$$

Semplificando

$$a_k^2 x_1^2 - x_k^2 a_1^2 = 0 \ \ k = 2, \dots, N$$

Semplificando

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a_1^2} = \frac{x_2^2}{a_2^2} \\ \frac{x_1^2}{a_1^2} = \frac{x_3^2}{a_3^2} \\ \\ \dots \\ \frac{x_1^2}{a_1^2} = \frac{x_N^2}{a_N^2} \\ \\ \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1, \\ \ x_i > 0 \ \forall i = 1, \dots, N \end{cases}$$

$$x_1^2 = \frac{a_1^2}{N},$$

la cui soluzione positiva è

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{N}}.$$

Dunque

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{N}} \quad i = 1, \dots, N$$

Esercizio 3.10. *Calcolare per a e b non entrambi nulli il minimo e il massimo assoluti della funzione* $ax + by$ *nell'insieme* $x^2 + y^2 = 1$.

Si definisce la funzione Lagrangiana

$$f(x, y, \lambda) = ax + by + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Applicando il metodo dei moltiplicatori si ricava

$$m = -\sqrt{a^2 + b^2}, \;\; M = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4. Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$

Definizione della derivata parziale prima di f in $\overline{x} \in A$, A aperto di $\mathbb{R}^n$

Definizione 4.1.

$$f_{x_i}(\overline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i + h, \dots, \overline{x}_n) - f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i, \dots, \overline{x}_n)}{h},$$

se tale limite esiste finito.

Definizione 4.2. *Definizione del gradiente di* f.

$$Df(x) = (f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x))$$

Definizione 4.3. $f : A \to \mathbb{R}$ *si dice differenziabile in* $x \in A$ *se esiste il gradiente di* f *e se vale la relazione di limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x) - Df(x) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

$$Df(x) = (f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x))$$

Si può anche scrivere

$$f(x + h) = f(x) + Df(x) \cdot h + o(\|h\|) \qquad h \to 0$$

f è differenziabile in A se è differenziabile in ogni punto appartenente all'insieme aperto A.

Se f è differenziabile in $x \in A$ allora f è continua in x Infatti

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x) + \lim_{h \to 0} Df(x) \cdot h + o(\|h\|) = f(x)$$

Teorema 4.4. Teorema del differenziale *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile in* A *aperto di* $\mathbb{R}^n$. *Se* $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ *sono continue in* $x \in A$ *allora* f *è differenziabile in* $x \in A$

Teorema 4.5. Teorema di derivazione delle funzioni composte *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile in* A *aperto di* $\mathbb{R}^n$. *Se* $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ *sono derivabili in* $t \in I$ *e se* f *è differenziabile in* $x(t) \in A$ *allora*

$$F(t) = f(x(t))$$

è derivabile in t e la sua derivata vale

$$F'(t) = Df(x(t)) \cdot x'(t)$$

Teorema 4.6. Derivata direzionale di funzioni differenziabili *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in A aperto di $\mathbb{R}^n$. Se f è differenziabile in $x \in A$ allora f ammette derivata direzionale in ogni direzione λ e vale la relazione*

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(x) = Df(x) \cdot \lambda$$

Esercizio 4.7. *Sia $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Per $x \neq 0$*

$$f(x) = \ln \|x\|$$

$$f_{x_i} = \frac{x_i}{\|x\|^2}$$

$$f_{x_i x_i} = \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{x_i}{\|x\|^3}\frac{x_i}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{x_i^2}{\|x\|^4}$$

$$\Delta \ln \|x\| = (n-2)\frac{1}{\|x\|^2}$$

Se $n = 2$ allora $\Delta \ln \|x\| = 0$.

5. Esercizi su Minimi e Massimi relativi in $\mathbb{R}^2$

Esercizio 5.1. *Data $f(x, y) = x^3 + y^3 - (1 + x + y)^3$ in $\mathbb{R}^2$, calcolarne eventuali massimi e minimi relativi.*

Cerchiamo i punti stazionari

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3(1 + x + y)^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3(1 + x + y)^2 = 0 \end{cases}$$

Riscriviamo il sistema sostituendo alla prima equazione la differenza tra la prima e la seconda:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y^2 - (1 + x + y)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x - y)(x + y) = 0 \\ y^2 - (1 + x + y)^2 \end{cases}$$

da cui otteniamo due sottosistemi

$$\begin{cases} x = -y \\ y^2 - (1 + x + y)^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ y^2 - (1 + x + y)^2 = 0 \end{cases}$$

Per il primo possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x = -y \\ y^2 - (1 - y + y)^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -y \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

ottenendo i punti $A(1,-1)$ e $B(-1,1)$.
Passando al secondo sistema

$$\begin{cases} x = y \\ y^2 - (1+2y)^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ 3y^2 + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

ottenendo i punti $C(-1,-1)$ e $D(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$.
Calcoliamo ora la matrice Hessiana:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6(1+x+y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 6(1+x+y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6(1+x+y)$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Per $A(1,-1)$

$$\begin{vmatrix} 6 - 6(1+1-1) & -6(1+1-1) \\ -6 & 6 - 6(1+1-1) \end{vmatrix} = -36 < 0$$

il determinante della matrice è negativo, il punto è di sella.
Per $B(-1,1)$

$$\begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

il determinante della matrice risulta negativo, il punto è di sella.
Per $C(-1,-1)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

il determinante della matrice è negativo, il punto è di sella.
Per $D(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

Poichè il determinante della matrice è positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(D) = -4 < 0$, D è un punto di massimo relativo.

Esercizio. Classificare gli eventuali punti stazionari della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x,y) = \cos x + \sin y$$

Soluzione:

I punti stazionari della funzione sono dati dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\sin x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{2} + j\pi & j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Si hanno dunque infiniti punti stazionari, ciascuno di coordinate $(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi)$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}$. La matrice hessiana in un generico punto (x, y) è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}.$$

Calcolandola in un generico punto stazionario diventa

$$H\big(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi\big) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice Hessiana in un generico punto stazionario risulta $(-1)^{j+k}$. Dunque, se k e j sono entrambi pari o entrambi dispari, il determinante risulta pari a 1 e dunque positivo; si tratterà di punti di max o min relativo a seconda del segni di $(-1)^{k+1}$: se k è pari di tratta di un punto di max relativo, se k è dispari si tratta di un minimo relativo. Ripetendo se k e j sono entrambi pari si tratta di un massimo relativo. Se invece k e j sono entrambi dispari si tratta di un minimo relativo. Infine se infine k è pari e j è dispari (o viceversa), abbiamo un punto di sella poiché il valore del determinante è -1.