Correzione scritto 03/02/2020

Esercizio 1

Soluzione:

a): $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1 \,:\, 0 \leq y \leq 2x\}$.

b): $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq 2\,,\, \frac{y}{2} \leq x \leq 1\}$.

Calcolo dell'integrale:

$$\int_D xydxdy = \int_0^1 x\Big(\int_0^{2x} ydy\Big)dx = \int_0^1 x\frac{(2x)^2}{2}dx = 2\int_0^1 x^3dx = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2

Soluzione: Le derivate parziali $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ non esistono.

Consideriamo prima $f_x(0,0)$ e mostiamo che il seguente limite non esiste:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}.$$

Per verificare che il precedente limite non esiste consideriamo separatamente $h \to 0^+$ e $h \to 0^-$. Usando che $\sqrt{h^2} = |h|$ si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-h}-1}{h} = -1,$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{h}-1}{h} = -1.$$

Dunque $f_x(0,0)$ non esiste. Un simile ragionamento si applica per $f_y(0,0)$.

Esercizio 3

Soluzione: I minimi sono tutti i punti dell'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = \pm y\} \cap \{(x,y) \,:\, x^2+y^2 \leq 1\},$$

e la funzione nei punti di minimo vale 0. I punti di massimi si trovano in

$$(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$$

e la funzione nei punti di massimo vale 1.

Analizziamo separatamente la funzione nell'insieme $\{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ e nell'insieme $\{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$.

In $\{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ calcoliamo i punti critici:

$$\begin{cases} f_x = 4(x^2-y^2)x = 0, \\ f_y = -4(x^2-y^2)y = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni del precedente sistema risolvono $x^2 = y^2$, cioè $x = \pm y$. Nota che, se (x_0, y_0) verifica $x_0 = \pm y_0$, allora $f(x_0, y_0) = 0 \leq f(x,y)$.

Dunque ogni punto dell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pm y\} \cap \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ è di minimo per f.

In $\{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ possiamo esprimere (x,y) in coordinate polari, cioè $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$ per $\theta \in [0, 2\pi)$. Dunque la funzione vale

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 = (\cos(2\theta))^2.$$

Sia $\tilde{f}(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$ allora

$$\tilde{f}'(\theta) = -4\cos(2\theta)\sin(2\theta) = -2\sin(4\theta).$$

Dunque $\tilde{f}' = 0$ se $4\theta = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Dunque i punti critici per $\tilde{f}$ sono dati da

$$\theta = \frac{k}{4}\pi, \qquad k = 0, \dots, 7.$$

Inoltre, si verifica subito che per $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, $\tilde{f}(\theta) = 0$. Essendo, $f(\cos\theta, \sin\theta) = \tilde{f}(\theta) = 0$ allora i punti

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

sono di minimo per f. Con un ragionamento analogo si prova che

$$(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$$

sono punti di massimo per f e la funzione vale 1 in tali punti.

Esercizio 4

Soluzione: Il raggio di convergence è pari a 0. Infatti, usando il criterio della radice,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \left(n + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right|.$$

Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\log(n+\frac{1}{n})} = \infty.$$

Dunque $R = 0$.

Esercizio 5

Soluzione: $a_2 = \frac{1}{5\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})$.

Si ricordi che

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(2x)dx.$$

Inoltre, integrando per parti due volte,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(2x)dx &= [e^x \cos(2x)]_{-\pi}^{\pi} + 2\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(2x)dx \\
&= e^{\pi} - e^{-\pi} + [e^x \sin(2x)]_{-\pi}^{\pi} - 4\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(2x)dx \\
&= e^{\pi} - e^{-\pi} - 4\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(2x)dx.
\end{aligned}$$

Perció,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(2x)dx = \frac{1}{5}(e^{\pi} - e^{-\pi}).$$