1 Serie di Fourier

Determinare la serie di Fourier di

$$f(x) = \pi x - |x|x,$$

per $x \in [-\pi, \pi)$ e prolungate per periodicità in $\mathbb{R}$.

Dimostrare

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

2 Forme differenziali lineari

Data la forma differenziale

$$e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$$

stabilire se la forma è chiusa, stabilire se la forma è esatta e calcolare

$$\int_\gamma e^x \sin y dx + e^x \cos y dy,$$

ove γ è la curva congiungente i punti $\big(x(\frac{\pi}{4})\big), y(\frac{\pi}{4})\big)$, $\big(x(\frac{\pi}{2}), y(\frac{\pi}{2})\big)$ orientata nel verso che va da $\big(x(\frac{\pi}{4})\big), y(\frac{\pi}{4})\big)$ a $\big(x(\frac{\pi}{2}), y(\frac{\pi}{2})\big)$ e di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t^2, & t \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \\ y(t) = t^3 \end{cases}$$

3 Minimo assoluto

Calcolare eventuali punti di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

con $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, comunque scelto.

3.1 Se esistono minimi relativi, allora la natura del punto (x_m, y_m) (cioè di minimo relativo) non cambia se cambia il punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (dimostrare)

4 Soluzioni

4.1 Soluzione esercizio n.1

La funzione è dispari, pertanto $a_0 = 0$, $a_k = 0, \forall k \in N$. Indicata con $\mathbb{S}_1$ la serie di Fourier relativa a f si ha

$$\mathbb{S}_1 = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin(2k-1)x,$$

La somma della serie si calcola sostituendo $x = \frac{\pi}{2}$ nella somma $\mathbb{S}_1$:

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3},$$

da cui il risultato.

4.2 Soluzione esercizio n.2

Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y)$$

La forma inoltre è esatta, infatti la primitiva è data da $e^x \sin y + c$ con c costante reale

$$\int_{+\gamma} e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$$

Possiamo non risolvere l'integrale utilizzando il teorema di integrazione delle forme esatte. Occorre comunque calcolare i punti

$$\begin{cases} x(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\pi}{4})^2, \\ y(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\pi}{4})^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^2, \\ y(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^3 \end{cases}$$

$$= e^{(\frac{\pi}{2})^2} \sin(\frac{\pi}{2})^3 - e^{(\frac{\pi}{4})^2} \sin(\frac{\pi}{4})^3$$

4.3 Soluzione esercizio n.3

$$\begin{cases} f_x = 2x + 2(x - x_0) = 0, \\ f_y = 2y + 2(y - y_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - x_0 = 0, \\ 2y - y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = \frac{x_0}{2} \ y = \frac{y_0}{2}$$

$$\begin{cases} f_{x,x} = 4, \\ f_{y,y} = 4 \\ f_{x,y} = f_{y,x} = 0 \end{cases}$$

il punto è di minimo relativo comunque scelto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Inoltre è di minimo assoluto perché

$$f(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}) = \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{2}$$

Separando la parte in x e la parte in y, si ha

$$x^2 + (x - x_0)^2 - \frac{x_0^2}{2} = 2\big(x - \frac{1}{2}x_0\big)^2 \geq 0.$$

$$y^2 + (y - y_0)^2 - \frac{y_0^2}{2} = 2\big(y - \frac{1}{2}y_0\big)^2 \geq 0.$$