. . . .

Cognome e nome — Ingegneria — Matricola

ANALISI MATEMATICA I — 05/12/07

Esercizio 1. Al variare di β reale e positivo discutere l'esistenza ed eventualmente calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \frac{n^n}{\big(1+n\big)^n}\frac{1}{n^\beta}$$

Esercizio 2.
Dimostrare che

$$\frac{n!}{(2n)^n} \leq \frac{1}{2^{2n-1}} \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

Esercizio 3.
Calcolare

$$\int_0^3 \log(|x-10|-|x-7|)dx$$

Esercizio 4.
Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \arccos x^2$ nel punto $x=0$.

Esercizio 5.
Determinare massimi e minimi della funzione $f(x) = \cos x^2$ in $\left[-\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}}\right]$.

Esercizio 6. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log|x^2 - x^4 + 2|$$

Soluzioni

Esercizio 1. Al variare di β reale e positivo discutere l'esistenza ed eventualmente calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{n^n}{\left(1+n\right)^n}\frac{1}{n^\beta}$$

Consideriamo la successione:

$$\frac{n^n}{\left(1+n\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Tale successione è decrescente e quindi per il teorema fondamentale sulle successioni monotone

$$\frac{1}{e}<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\leq\frac{1}{2}$$

Moltiplicata per $(-1)^n$ risulta una successione limitata

$$\left|(-1)^n\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right|\leq\frac{1}{2}$$

Per la positività di β, si tratta di una successione limitata moltiplicata per una successione infinitesima,

$$(-1)^n\frac{n^n}{\left(1+n\right)^n}\frac{1}{n^\beta},$$

pertanto il limite per $n\to+\infty$ esiste e vale zero.

Esercizio 2.

Dimostare per induzione che

$$\frac{n!}{(2n)^n}\leq\frac{1}{2^{2n-1}}\qquad\forall n\in\mathbf{N}$$

La proposizione risulta vera per $n=1$

Supposto vero al passo n lo dimostriamo al passo $n+1$

$$\frac{(n+1)!}{(2(n+1))^{n+1}}=\frac{n^n n!}{2^n(n+1)^n n^n}\frac{n+1}{2(n+1)}=\frac{n^n n!}{(n+1)^n(2n)^n}\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2^{2n-1}}\frac{1}{2}\frac{n^n}{(n+1)^n}\leq\frac{1}{2^{2n+1}}$$

(Si poteva anche semplificare moltiplicando per 2^n)

Esercizio 3.

Calcolare

$$\int_0^3\log(|x-10|-|x-7|)dx$$

$$\int_0^3\log(|x-10|-|x-7|)dx=\int_0^3\log(-x+10+x-7)dx=3\log 3$$

Esercizio 4.

Calcolare la derivata della funzione $f(x)=x\arccos x^2$ nel punto $x=0$.

$$f'(x)=\arccos x^2-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$f'(0)=\frac{\pi}{2}$$

Esercizio 5.

Determinare massimi e minimi della funzione $f(x)=\cos x^2$ in $\left[-\sqrt{\frac{\pi}{4}},\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right]$.

Il massimo e il minimo assoluto della funzione esistono per il teorema di Weierstrass: vanno cercati nei punti di non derivabilità, nei punti stazionari, agli estremi dell'intervallo. Nel caso in esame la funzione è derivabile. La ricerca dei punti stazionari fornisce $-2x\sin x^2=0$. Pertanto nell'intervallo $\left[-\sqrt{\frac{\pi}{4}},\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right]$ si ha il solo punto $x=0$ (gli altri punti $x=\pm\sqrt{k\pi},k\neq0$ non vanno considerati) ove la funzione vale 1 e è un massimo assoluto. Mentre $f(-\sqrt{\frac{\pi}{4}})=f(\sqrt{\frac{\pi}{4}})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ fornisce il minimo assoluto della funzione nell'intervallo in considerazione.

Esercizio 6. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log |x^2 - x^4 + 2|$$

Essendo $|x^2 - x^4 + 2| \geq 0$ la funzione sarà definita non appena $|x^2 - x^4 + 2| \neq 0$. Posto $x = y^2$ si ha $-y^2 + y + 2 = 0$, che fornisce le soluzioni $y_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2}$, e quindi $y_1 = \dfrac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1$ (da non considerare perchè non può essere $y^2 = -1$ in $\mathbf{R}$) e $y_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$.

Pertanto l'insieme di definizione della funzione è dato da $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$