POTENZA DI UN BINOMIO

Dimostrare per induzione che

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

per ogni coppia di numeri reali a e b.

Proof. L'asserto è vero per $n = 1$. Assumendo vera la formula al passo n la dimostriamo al passo $n+1$. Vogliamo dimostrare che

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = \big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\big)(a+b) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + a^{n+1} + b^{n+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

□

Esercizio Dimostrare che

- $$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$
- $$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Date: October 17, 2011.

1. Applicazione

$$\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}}=1.$$

Dall'identità

$$\boxed{\left[\left((n)^{\frac{1}{n}}-1\right)+1\right]^n=n}$$

Dalla formula del binomio,

$$[\left((n)^{\frac{1}{n}}-1\right)+1\Big]^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((n)^{\frac{1}{n}}-1\right)^k,$$

considerando nella somma unicamente l'addendo ottenuto per $k=2$, otteniamo

$$\frac{n(n-1)}{2}\left((n)^{\frac{1}{n}}-1\right)^2<n,$$

quindi

$$0\leq(n)^{\frac{1}{n}}-1<\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$
$$1\leq(n)^{\frac{1}{n}}<1+\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

Passando al limite,

$$\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}}=1.$$

2. La formula del Binomio e la Formula di Eulero

La formula di Eulero: per $x\in\mathbb{R}$, i unità immaginaria $i^2=-1$.

$$\boxed{\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}$$

Ricordiamo la
Formula di triplicazione

$$\cos 3\theta+i\sin 3\theta=(e^{i\theta})^3=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=$$
$$=\cos^3\theta-i\sin^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\sin^2\theta\cos\theta$$
$$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta$$
$$\sin 3\theta=-\sin^3\theta+3\cos^2\theta\sin\theta$$

Più in generale si ha
Proposizione. Si ha

$$\cos nx=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\frac{(n-k)\pi}{2}\cos^k x\sin^{n-k}x,\qquad n\in\mathbb{N}$$

Dimostrazione.

$$\cos nx=\left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right)=\left(\frac{(e^{ix})^n+(e^{-ix})^n}{2}\right)=$$

$$\frac{(\cos x + i\sin x)^n + (\cos x - i\sin x)^n}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\cos^k x (i\sin x)^{n-k} + \cos^k x(-i\sin x)^{n-k}}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(i)^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i\pi}{2}})^{n-k} + (e^{\frac{-i\pi}{2}})^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i(n-k)\pi}{2}}) + (e^{\frac{-i(n-k)\pi}{2}})}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x$$

Esercizio. Dalla formula di Eulero, $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria $i^2 = -1$.

$$\boxed{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}},$$

ricavare che

$$\sin nx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$