1. Disuguaglianze

Dati $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$il prodotto scalare $x \cdot y$ è un numero reale definito da

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N.$$

Il prodotto scalare soddisfa le proprietà: per $x, y, z \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = y \cdot x, \qquad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \qquad \lambda x \cdot y = \lambda x \cdot y.$$

e

$$x \cdot x \geq 0, \qquad x \cdot x = 0, \iff x = 0.$$

Il modulo o la norma di $x \in \mathbb{R}^N$ è data da

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_N^2}$$

Vale per $x, y \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|x| \geq 0, \qquad |x| = 0, \iff x = 0.$$

$$|\lambda x| = |\lambda||x|$$

Vale inoltre la disuguaglianza triangolare (che possiamo ottenere come caso particolare della disuguaglianza di Minkowski $p = 2$.)

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

In $\mathbb{R}^N$ vale (dimostrare per esercizio)

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y$$

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (che possiamo ottenere come conseguenza della disuguaglianza di Holder $p = q = 2$) mette in relazione il prodotto scalare e la norme

$$|x \cdot y| \leq |x||y|,$$

Più in generale possiamo definire per p reale e > 1

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots |x_N|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La notazione

$$\|x\|_p$$

è giustificata dalla Disuguaglianza di Minkowski.
Premettiamo la seguente

Definizione Per ogni $p \in (1, +\infty)$, si dice coniugato di p il numero reale q tale chet

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Al numero $p = 1$ si associa q nei reali estesi $q = +\infty$

Disuguaglianza di Young. Sia $p \in (1, +\infty)$, q il suo coniugato. Per ogni x, y reali e positivi si ha

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} x^q.$$

Disuguaglianza di Holder. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$. Per ogni $p \in (1, +\infty)$, indicato con q il suo coniugato si ha

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|x\|_q.$$

Disuguaglianza di Minkowski. Per ogni $p \in [1, +\infty]$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ abbiamo

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{1}$$