Analisi Matematica II Elettronica Comunicazioni II parte

Docente Prof.ssa Paola Loreti

Polinomi trigonometrici. Un polinomio trigonometrico è una combinazione lineare finita di funzioni $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$. E' una funzione periodica di periodo 2π.

$$s_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Funzioni periodiche.
Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T > 0$ se

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il più piccolo numero T (se esiste) si dice periodo minimo.

E' interessante osservare l'invariata per traslazione dell'integrale di una funzione periodica

$$\int_0^T f(x+y)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Cominciamo con l'osservare la seguente proprietà. Per ogni numero reale a

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Dimostrazione

$$\int_0^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{a+T} f(x)dx$$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx =$$

$$\int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x+T)dx$$

$$\int_0^a f(x+T)dx = \int_T^{a+T} f(x)dx$$

Ne consegue

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

In più

$$\int_0^T f(x+y)dx = \int_y^{T+y} f(t)dt = \int_0^T f(x)dx$$

Serie di Fourier. Supponiamo che la successione di somme parziali $s_n(x)$ converga per ogni $x \in R$. Otteniamo la serie trigonometrica di coefficienti a_0, a_k, b_k.

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Data una funzione f periodica di periodo 2π ci chiediamo se essa sia sviluppabile in una serie trigonometrica ossia se si possono determinare i coefficienti a_0 a_k b_k in modo che la serie converga ed abbia come somma $f(x)$.

Ortonormalità

Per $n = 1, 2, \ldots;\quad m = 1, 2, \ldots$ risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \delta_{m,n};\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \delta_{m,n}$$

$\delta_{m,n}$ il simbolo di Kronecker

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

Identità di Weber per $n, m \in \mathbb{N}$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\big((\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\big)$$

$$\sin(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\big((\sin((n-m)x) + \sin((n+m)x)\big)$$

$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\big((\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)\big)$$

$$\sin^2(nx) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2nx)\big)$$

$$\cos^2(nx) = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2nx)\big)$$

Per $n \neq m \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx =$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-m)x) dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x) \ dx \right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-m} \sin((n-m)x|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n+m} \sin((n+m)x|_{-\pi}^{\pi} \right) = 0$$

Per $n \neq m \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \Big((\sin((n{-}m)x){+}\sin((n{+}m)x)\big)dx\Big) =$$

$$\frac{1}{2}\bigg(\int_{-\pi}^{\pi}(\sin((n-m)x)dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sin((n+m)x)dx\bigg) =$$

$$\frac{1}{2}\bigg(-\frac{1}{n-m}\cos((n-m)x|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n+m}\cos((n+m)x|_{-\pi}^{\pi}\bigg) = 0$$

Assumiamo

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Moltiplicando $f(x)$ per $\cos(mx)$ e integrando tra $-\pi, \pi$ si ottiene

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

Moltiplicando $f(x)$ per $\sin(mx)$ e integrando tra $-\pi, \pi$ si ottiene

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

Le costanti sopra definite si chiamano coefficienti di Fourier di $f(x)$.
La serie, una volta specificati i coefficienti, si chiama Serie di Fourier di $f(x)$. Jean Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 21 marzo 1768 -Parigi, 16 maggio 1830)

Esempio. Onda quadra: un segnale composto da un'alternanza regolare di due valori

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

prolungata in modo periodico in $\mathbb{R}$.
I coefficienti di Fourier sono

$$a_0 = 1$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{1 - (-1)^k}{k\pi}$$

La serie di Fourier risulta

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

Funzioni pari:

$$b_k = 0 \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$$

$f(x)\sin(kx) = F(x)$ dispari

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \int_{-\pi}^{0} F(x)dx + \int_0^{\pi} F(x)dx =$$

$$-\int_{\pi}^{0} F(-x)dx + \int_0^{\pi} F(x)dx = \int_{\pi}^{0} F(x)dx + \int_0^{\pi} F(x)dx$$

Funzioni dispari:

$$a_k = 0 \qquad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$f(x) \cos(kx) = F(x)$ dispari

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \int_{-\pi}^{0} F(x) dx + \int_{0}^{\pi} F(x) dx =$$

$$-\int_{\pi}^{0} F(-x) dx + \int_{0}^{\pi} F(x) dx = \int_{\pi}^{0} F(x) dx + \int_{0}^{\pi} F(x) dx$$

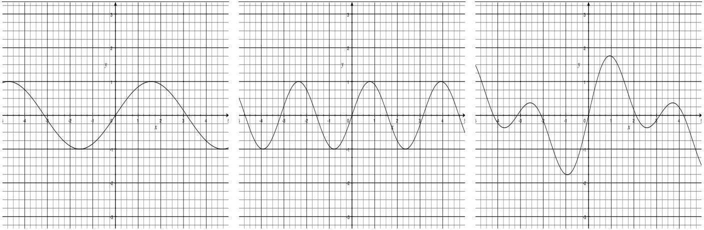

Figure: $\sin x$, $\sin(2x)$, $\sin x + \sin(2x)$

Se una funzione f risulta periodica di periodo T, allora la funzione $f(nx)$ risulta periodica di periodo $\frac{T}{n}$.
Infatti $g(x) = f(nx)$

$$g(x + \frac{T}{n}) = f(nx + T) = f(nx) = g(x)$$

$f(x) = \sin(2x) \qquad (T = \pi)$;
osserviamo:$f(x) = \sin x + \sin(2x) \qquad (T = 2\pi)$.
Sviluppo in serie di Fourier di $f(x) = \sin^3 x + \sin^2 x + \cos x$ (polinomio trigonometrico)

$$f(x) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)\sin x + \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big) + \cos x$$

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos(2x)\sin x + \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big) + \cos x =$$

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \cos x =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(3x) + \cos x$$

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ \sin x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

prolungata in modo periodico in $\mathbb{R}$, calcolare la serie di Fourier.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{1}{\pi} \cos x|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$\sin(x)\cos(kx) = \frac{1}{2}\big((\sin((1-k)x) + \sin((1+k)x)\big)$$

$$\sin(x)\sin(kx) = \frac{1}{2}\big((\cos((k-1)x) - \cos((1+k)x)\big)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(kx)\sin x dx = ?$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \big((\sin((1-k)x) + \sin((1+k)x)\big) dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos((1-k)x)}{1-k} + \frac{\cos((1+k)x)}{1+k}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{1-k} - \frac{1}{1-k} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{k}}{1-k} + \frac{1}{1-k} + \frac{(-1)^{k}}{k+1} + \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left((-1)^k\left(\frac{1}{1-k} + \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{1-k} + \frac{1}{k+1}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2(-1)^k}{1-k^2} + \frac{2}{1-k^2}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^k+1}{1-k^2}$$

$$\begin{cases} 0 & k=1 \\ \frac{1}{2\pi}\frac{4}{1-4m^2} & k=2m \\ 0 & k=2m+1 \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin(kx)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \big((\cos((k-1)x) - \cos((k+1)x)\big)dx =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases}$$

Serie di Fourier

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(1-4m^2)}\cos(2mx)$$

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi)+1}{(1-k^2)}\cos(kx)$$

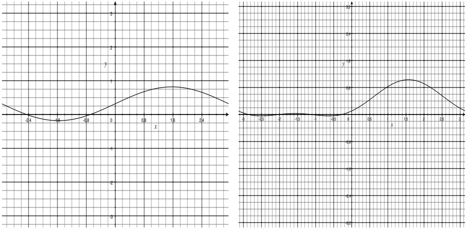

Figure: $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x$, $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{3\pi} cos(2x)$

- Data la funzione
$$f(x) = x|x|,$$
per $x \in [-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità in $\mathbb{R}$ determinare le serie di Fourier.

La funzione è dispari, pertanto $a_0 = 0$, $a_k = 0, \forall k \in N$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x^2 \sin(kx) dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin(kx) dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{\pi}^{0} -x^2 \sin k(-x) dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin(kx) dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x^2 \sin(kx) dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x^2 \sin(kx) dx\right].$$

Risulta:

$$\int x^2 \sin kx dx = -\int x^2 \frac{1}{k} (\cos(kx))' dx =$$

$$-\frac{1}{k} x^2 (\cos(kx)) + \frac{2}{k} \int x \cos(kx) dx =$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx = -\frac{1}{k} x^2 (\cos kx)|_0^{\pi} + \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx =$$

$$= -\frac{1}{k} \pi^2 (-1)^k + \frac{2}{k^2} \int_0^{\pi} x (\sin(kx))' dx =$$

$$= -\frac{1}{k} \pi^2 (-1)^k + (\frac{2}{k^3} (-1)^k - \frac{2}{k^3})$$

Quindi indicata con S la serie di Fourier relativa a f, si ha

$$S = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{k}\pi^2(-1)^k + \frac{2}{k^3}(-1)^k - \frac{2}{k^3} \right) \sin(kx).$$

Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ -3x, & 0 < x \leq \pi \end{cases} .$$

Determinare la serie di Fourier di f .

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)\right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx, k = 0, 1, 2, ...$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier della f.

$$a_0 = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 3x dx = -\frac{3}{2}\pi;$$

$$a_k = -\frac{3}{\pi}\int_0^\pi x\cos(kx)dx = -\frac{3}{\pi}\left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right];$$

$$b_k = -\frac{3}{\pi}\int_0^\pi x\sin(kx)dx = -\frac{3}{k}(-1)^{k+1} = \frac{3}{k}(-1)^k.$$

la serie di Fourier richiesta è:

$$-\frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin(kx)}{k}.$$

Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \max\{2, 2-x\}, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

Determinare la serie di Fourier di f.

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, k = 0, 1, 2, ...$$

Osserviamo :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in (-\pi, 0) \\ 2, & x \in [0, \pi] \end{cases} .$$

Dunque:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2 - x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2dx = \frac{\pi}{2} + 4.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2 - x)\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\cos(kx)dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx - \frac{1}{\pi}\frac{1}{k}x\sin(kx)_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{0} \sin(kx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1].$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)\sin(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\sin(kx)dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin(kx)dx =$$

$$\frac{1}{\pi k}x\cos(kx)|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{0}\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\pi(-1)^k = \frac{1}{k}(-1)^k.$$

La serie di Fourier richiesta è:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+4\right) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]\cos(kx) + \frac{1}{k}(-1)^k\sin(kx)\right].$$

Forma esponenziale

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx} = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\gamma_k \cos(kx) + i\gamma_k \sin(kx)$$

$$+\gamma_{-k} \cos(-kx) + i\gamma_{-k} \sin(-kx) \Big) =$$

$$\gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k + \gamma_{-k}) \cos(kx) + i(\gamma_k - \gamma_{-k}) \sin(kx)$$

$$\gamma_0 = a_0/2$$

$$\gamma_k + \gamma_{-k} = a_k$$

$$i(\gamma_k - \gamma_{-k}) = b_k$$

$$\gamma_k + \gamma_{-k} = a_k$$

$$\gamma_k - \gamma_{-k} = -ib_k$$

Sommando

$$\gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

Sottraendo

$$\gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

E' utile scrivere la serie di Fourier nella forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

Risulta per $n \neq m$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

In conclusione

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \delta_{n,m}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

Serie di Fourier per funzioni periodiche di periodo T.
Sia f periodica di periodo T.
La serie di Fourier di f risulta

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{2k\pi}{T}x) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{T}x)$$

i cui coefficienti sono

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx$$

Per funzioni pari compaiono solo i coseni:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_k &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\,\mathrm{d}x \\
b_k &= 0
\end{aligned}
$$

mentre per funzioni dispari compaiono solo i seni:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a_k = 0 \\
b_k &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Esempio. Onda quadra: un segnale composto da un'alternanza regolare di due valori

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

prolungata in modo periodico in $\mathbb{R}$.

$$T = 2$$

$$a_0 = a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \, \mathrm{d}x$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \, \mathrm{d}x = \frac{4}{2} \int_0^{2/2} \sin\left(\frac{2\pi}{2} kx\right) \, \mathrm{d}x =$$

$$2 \int_0^1 \sin(\pi kx) \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi k} \cos(\pi kx)|_0^1 = -\frac{2}{\pi k}((-1)^k - 1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & -\pi < x \leq 0 \\ \cos x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

prolungata in modo periodico in $\mathbb{R}$.
Esercizio a_0 b_2 a_1

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \sin x dx + \int_{0}^{\pi} \cos x\right) = -\frac{2}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \sin x \cos x dx + \int_{0}^{\pi} \cos^2 x dx\right)$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \sin x \sin(2x) dx + \int_{0}^{\pi} \cos x \sin(2x) dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{0} \sin x \cos(x) dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x|_{-\pi}^{0} = 0$$

$$\int_{0}^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\pi}^{0} \sin x \sin(2x) dxdx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{6}\sin(3x)|_{-\pi}^{0} = 0$$

$$\int_{0}^{\pi} \cos x \sin(2x) dx = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{6}\cos(3x)|_{0}^{\pi} = \frac{4}{3}$$

$$b_2 = \frac{4}{3\pi}$$

Disuguaglianza di Bessel. Consideriamo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx) \right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, k = 1, 2, ...$$

Definizione.
Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diciamo che f è regolare a tratti in $[a, b]$ se esistono un numero finito di punti x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ con $a_0 = x_0 = x_1 < x_1 < x_2 \cdots < x_N = b$ tali che f è derivabile con derivata continua in ogni intervallo (x_i, x_{i+1}), e la restrizione di f' a (x_i, x_{i+1}) è prolungabile con continuità in $[x_i, x_{i+1}]$.
Se la funzione f è definita su $\mathbb{R}$, f è regolare a tratti in $\mathbb{R}$ se è regolare a tratti in ogni intervallo [a,b] contenuto in $\mathbb{R}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare a tratti, periodica di periodo $T = 2\pi$.

$s_n(x)$ ridotta n-esima serie di Fourier di f, con f limitata e integrabile in $[-\pi, \pi]$
Consideriamo il seguente integrale:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 \, dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x)^2 + s_n(x)^2 - 2f(x)s_n(x) \right] \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k cos(kx) + b_k sin(kx)])^2 \, dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k^2 cos^2(kx) + b_k^2 sin^2(kx)\right]) \, dx +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{altri prodotti} \, dx \quad \text{(con contributo nullo)}$$

$$= \frac{a_0^2}{4} 2\pi + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \pi + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \pi =$$

$$\frac{a_0^2}{2}\pi + \pi \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$$

$$- 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k cos(kx) + b_k sin(kx)]\right] dx =$$

$$- a_0\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\, dx -$$

$$2\sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(kx)\, dx =$$

$$- a_0^2\pi - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(a_k\pi) - 2\sum_{k=1}^{n} b_k(b_k\pi) =$$

$$- a_0^2\pi - 2\pi\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$$

Vale la disuguaglianza:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{2}\pi - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \geq 0$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Dalla disuguaglianza di Bessel segue

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} b_k = 0,$$

ossia

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx = 0.$$

Nucleo di Dirichlet

$$d_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

Si ha

$$d_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2}))}$$

Infatti sommiamo da 1 a n

$$\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(kx)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x)) = \sin((n+\frac{1}{2})x) - \sin(\frac{x}{2})$$

Inoltre

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d_n(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Segue da $d_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$ ed effettuando l'integrazione.