Analisi Matematica I a.a. 2003-2004. Prove scritte e risoluzioni.
Proff. Paola Loreti e Daniela Sforza

1 - Determinare il dominio di definizione e calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x-2} + \log(\log x)\,.$$

....

Per determinare il dominio di f, occorre imporre $x \neq 2$, $x > 0$ e $\log x > 0$; di conseguenza il dominio di f è $]1,2[\cup]2,+\infty[$.

Per calcolare la derivata di f, si devono utilizzare i teoremi sulla derivata del quoziente e sulla derivata di funzioni composte, e quindi si ottiene

$$f'(x) = \frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2} + \frac{1}{x\log x}\,, \qquad x \in\,]1,2[\cup]2,+\infty[\,.$$

---

2 - Studiare la funzione

$$g(x) = \frac{1}{(x+3)^3}\,.$$

....

In primo luogo si osservi che g è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \neq -3$. I limiti agli estremi del dominio sono dati da

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to(-3)^-} g(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to(-3)^+} g(x) = +\infty\,;$$

ne segue che l'asse $y = 0$ è un asintoto orizzontale e la retta $x = -3$ è un asintoto verticale.

Si noti ora che la derivata prima di g è data da

$$g'(x) = -\frac{3}{(x+3)^4}\,, \qquad \text{per ogni } x \neq -3\,,$$

e di conseguenza la funzione g è monotona strettamente decrescente. La derivata seconda di g è

$$g''(x) = \frac{12}{(x+3)^5}\,, \qquad \text{per ogni } x \neq -3\,,$$

da cui segue che g è concava per $x < -3$, mentre g è convessa per $x > -3$.

È opportuno notare che si poteva anche giungere a queste conclusioni osservando semplicemente che il grafico della funzione g si ottiene per traslazione da quello della funzione elementare $x \to \dfrac{1}{x^3}$.

---

3 - Verificare mediante il principio di induzione che

$$D^n(\log x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\,.$$

. . . .

Per $n = 1$ l'uguaglianza è vera, in quanto

$$D\log x = \frac{1}{x}\,.$$

Si supponga che l'uguaglianza sia vera per un certo $n \in \mathbf{N}$ e si passi a riconoscere la stessa per $n + 1$. Infatti, per l'ipotesi induttiva si ha

$$D^{n+1}(\log x) = DD^n(\log x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\ D(x^{-n}) = \frac{(-1)^n\ n!}{x^{n+1}}\,.$$

In conclusione, per il principio di induzione l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbf{N}$.

---

4 - Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\log\frac{1}{x}\right)^x\,.$$

. . . .

Per calcolare il limite richiesto, è conveniente determinare separatamente i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} x^x\,, \qquad \lim_{x\to 0^+}\left(\log\frac{1}{x}\right)^x\,.$$

Dapprima si osservi che

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log x} = 1\,.$$

Per quanto riguarda il secondo limite, si noti che

$$\left(\log\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\log\log(1/x)}\,. \tag{1}$$

Posto $y = 1/x$, si passa a calcolare $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\frac{\log\log y}{y}$. Poiché tale limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$, si può applicare il teorema di de l'Hôpital: il limite del rapporto delle derivate è dato da

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y\log y} = 0\,.$$

Pertanto, grazie alla (1) si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\log\frac{1}{x}\right)^x = 1\,,$$

e di conseguenza

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\log\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} x^x\left(\log\frac{1}{x}\right)^x = 1\,.$$

---

5 - Calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^{1}\Big(1-|x^2-2x+1|\Big)\,dx$$

....

È sufficiente osservare che

$$\int_{-2}^{1}\Big(1-|x^2-2x+1|\Big)dx = \int_{-2}^{1}\Big(1-(x-1)^2\Big)dx = \int_{-2}^{1}(-x^2+2x)\,dx = \Big[-\frac{x^3}{3}+x^2\Big]_{-2}^{1} = -6\,.$$

---

6 - Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos\Big(\frac{n^2\pi}{2n^2+3}\Big)\,.$$

Si consiglia di scrivere il termine $n-$esimo tramite la funzione seno in modo opportuno.

....

In primo luogo si osservi che la successione che definisce la serie assegnata è a termini positivi e infinitesima.

Seguendo il suggerimento del testo, si scriva il termine $n-$esimo nel modo seguente

$$\cos\Big(\frac{n^2\pi}{2n^2+3}\Big) = \operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{n^2\pi}{2n^2+3}\Big) = \operatorname{sen}\Big(\frac{3\pi/2}{2n^2+3}\Big)\,.$$

Tenendo presente il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n^2+3}\,,$$

e di conseguenza risulta convergente.

1 - Calcolare l'integrale

$$\int_{-3}^{3}|x^3-1|\;dx\,.$$

. . . .

Si osservi che

$$\int_{-3}^{3} |x^3-1|\,dx = \int_{-3}^{1} (1-x^3)\,dx + \int_{1}^{3} (x^3-1)\,dx = \left[x - \frac{x^4}{4}\right]_{-3}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - x\right]_{1}^{3} = 42\,.$$

---

2 - Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{|\log x| - 1}\,.$$

. . . .

In primo luogo si osservi che f è definita per $x > 0$ e $\log x \neq \pm 1$, cioé $x \neq e^{-1}$ e $x \neq e$.

Al fine di studiare la funzione è opportuno osservare che

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\log x + 1}\,, & \text{se } 0 < x \leq 1\,, x \neq 1/e\,, \\ \dfrac{1}{\log x - 1}\,, & \text{se } x > 1\,, x \neq e\,. \end{cases}$$

I limiti agli estremi del dominio sono dati da

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to (1/e)^-} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to (1/e)^+} f(x) = -\infty\,;$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to e^+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0\,;$$

ne segue che la funzione f può essere estesa per continuità in 0 da destra, le rette $x = 1/e$ e $x = e$ sono asintoti verticali e l'asse $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

Si noti ora che la derivata prima di f è data da

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\log x + 1)^2}\,, & \text{se } 0 < x < 1\,, x \neq 1/e \\ -\dfrac{1}{x(\log x - 1)^2}\,, & \text{se } x > 1\,, x \neq e\,. \end{cases}$$

Pertanto, la funzione f è monotona strettamente crescente negli intervalli $]0, 1/e[$ e $]1/e, 1[$, mentre f risulta monotona strettamente decrescente negli intervalli $]1, e[$ e $]e, +\infty[$. Inoltre, si osservi che f non derivabile nel punto 1, in quanto

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 1^-} f'(x)\,.$$

La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{\log x + 3}{x^2(\log x + 1)^3}\,, & \text{se } 0 < x < 1\,, x \neq 1/e \\ \dfrac{\log x + 1}{x^2(\log x - 1)^3}\,, & \text{se } x > 1\,, x \neq e\,. \end{cases}$$

Pertanto, $x = e^{-3}$ è un punto di flesso, f è concava negli intervalli $]0, e^{-3}[$, $]e^{-1}, 1[$ e $]1, e[$, mentre f è convessa in $]e^{-3}, e^{-1}[$ e $]e, +\infty[$.

3 - Verificare mediante il principio di induzione che per ogni $n \in \mathbf{N}$ il numero

$$14^n - 13n + 12 \quad \text{è divisibile per} \quad 13\,.$$

. . . .

Per $n = 1$ si ha $14 - 13 + 12 = 13$, che è ovviamente divisibile per 13.

Si supponga ora che per un certo $n \in \mathbf{N}$ il numero $14^n - 13n + 12$ sia divisibile per 13 e si passi a riconoscere la stessa affermazione per $n+1$. A tal fine, si osservi che

$$14^{n+1}-13(n+1)+12 = 14^n-13n+12+14^n(14-1)-13 = 14^n-13n+12+13(14^n-1)\,,$$

quindi per l'ipotesi induttiva $14^{n+1} - 13(n+1) + 12$ è divisibile per 13.

In conclusione, grazie al principio di induzione per ogni $n \in \mathbf{N}$ il numero $14^{n+1} - 13(n+1) + 12$ è divisibile per 13.

---

4 - Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k\,.$$

. . . .

Per calcolare il limite richiesto, è conveniente tenere presente che

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,, \qquad \text{per ogni} \quad n \in \mathbf{N}\,;$$

di conseguenza,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^3} = 0\,.$$

Compito A

1 - Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 x \log|x^2 - 9|dx.$$

. . . .

In primo luogo si osservi che

$$\int_0^2 x \log|x^2 - 9|dx = \int_0^2 x \log(9 - x^2)dx\,.$$

Posto $t = 9 - x^2$, integrando per sostituzione si ottiene

$$\int_0^2 x \log(9 - x^2)dx = \frac{1}{2}\int_5^9 \log t\,dt\,.$$

Infine, integrando per parti si ha

$$\int_0^2 x \log|x^2 - 9| dx = \frac{1}{2}\int_5^9 \log t dt =$$

$$\frac{1}{2}\left[t\log t - t\right]_5^9 = \frac{1}{2}(9\log 9 - 5\log 5 - 4) = 9\log 3 - \frac{5}{2}\log 5 - 2 .$$

---

2 - Determinare il massimo assoluto della funzione

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

nell'intervallo $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{2}{3\pi}\right]$.

....

L'esistenza del massimo assoluto è assicurata dal teorema di Weierstrass, essendo f continua nell'intervallo assegnato. Poichè

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} < 0 \qquad \text{per ogni } x \in \left]\frac{1}{2\pi}, \frac{2}{3\pi}\right[,$$

ne segue che la funzione f è decrescente in tale intervallo. Pertanto il massimo è assunto in $\frac{1}{2\pi}$ e vale 0.

Si poteva giungere alla stessa conclusione, osservando semplicemente che

$$f(x) \le 0 = f\left(\frac{1}{2\pi}\right) \qquad \text{per ogni } x \in \left[\frac{1}{2\pi}, \frac{2}{3\pi}\right] .$$

---

3 - Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{\sqrt{2}}{x} - \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{x}\right) .$$

....

Posto $y = \sqrt{2}/x$, il limite assegnato diventa

$$\lim_{y\to 0^-} 2\sqrt{2}\,\frac{y - \operatorname{sen} y}{y^3} = 2\sqrt{2}\lim_{y\to 0^-}\frac{y - \operatorname{sen} y}{y^3} .$$

Tenendo presente che

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^4) , \qquad \text{per} \quad y \to 0 ,$$

si ha

$$\lim_{y\to 0}\frac{y - \operatorname{sen} y}{y^3} = \frac{1}{6} .$$

Si noti che si giunge allo stesso risultato applicando il teorema di de l'Hôpital e ricordando il limite notevole

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}\,.$$

In conclusione,

$$\lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{\sqrt{2}}{x} - \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{x}\right) = 2\sqrt{2}\lim_{y\to 0^-} \frac{y-\operatorname{sen} y}{y^3} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,.$$

---

4 - Stabilire per quali valori del parametro $x > 0$ la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (2\log x)^k$$

è convergente e calcolarne la somma.

....

Fissato $x > 0$, la serie data è una serie geometrica di ragione $2\log x$. Pertanto tale serie converge se $|2\log x| < 1$, cioé $e^{-1/2} < x < e^{1/2}$, mentre non converge se $|2\log x| \geq 1$.

Per ogni $e^{-1/2} < x < e^{1/2}$ la somma della serie è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (2\log x)^k = \frac{1}{1-2\log x} - 1 = \frac{2\log x}{1-2\log x}\,.$$

Compito B

1 - Calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^{0} x\log|25-x^2|dx.$$

....

In primo luogo si osservi che

$$\int_{-2}^{0} x\log|25-x^2|dx = \int_{-2}^{0} x\log(25-x^2)dx\,.$$

Posto $t = 25 - x^2$, integrando per sostituzione si ottiene

$$\int_{-2}^{0} x\log(25-x^2)dx = -\frac{1}{2}\int_{21}^{25} \log t\,dt\,.$$

Infine, integrando per parti si ha

$$\int_{-2}^{0} x \log|25 - x^2|dx = -\frac{1}{2}\int_{21}^{25} \log t dt =$$

$$-\frac{1}{2}\left[t\log t - t\right]_{21}^{25} = -\frac{1}{2}\left(25\log(25) - 21\log(21) - 4\right) = -25\log 5 + \frac{21}{2}\log(21) + 2\,.$$

---

2 - Determinare il minimo assoluto della funzione

$$f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$$

nell'intervallo $\left[\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right]$.

. . . .

L'esistenza del minimo assoluto è assicurata dal teorema di Weierstrass, essendo f continua nell'intervallo assegnato. Poichè

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \operatorname{sen}\frac{1}{x} > 0 \qquad \text{per ogni}\, x \in \left]\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[\,,$$

ne segue che la funzione f è crescente in tale intervallo. Pertanto il minimo è assunto in $\frac{2}{\pi}$ e vale 0.

Si poteva giungere alla stessa conclusione, osservando semplicemente che

$$f(x) \geq 0 = f\left(\frac{2}{\pi}\right) \qquad \text{per ogni}\, x \in \left[\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right]\,.$$

---

3 - Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{\sqrt{3}}{x} - \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{x}\right).$$

. . . .

Posto $y = \sqrt{3}/x$, il limite assegnato diventa

$$\lim_{y\to0+} 3\sqrt{3}\,\frac{y - \operatorname{sen} y}{y^3} = 3\sqrt{3}\lim_{y\to0+}\frac{y - \operatorname{sen} y}{y^3}\,.$$

Tenendo presente che

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^4)\,, \qquad \text{per} \quad y \to 0\,,$$

si ha

$$\lim_{y\to0}\frac{y - \operatorname{sen} y}{y^3} = \frac{1}{6}\,.$$

Si noti che si giunge allo stesso risultato applicando il teorema di de l'Hôpital e ricordando il limite notevole

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}\,.$$

In conclusione,

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{\sqrt{3}}{x} - \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{x}\right) = 3\sqrt{3}\lim_{y\to 0+} \frac{y-\operatorname{sen} y}{y^3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

---

4 - Stabilire per quali valori del parametro $x > 0$ la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (4\log x)^k$$

è convergente e calcolarne la somma.

....

Fissato $x > 0$, la serie data è una serie geometrica di ragione $4\log x$. Pertanto tale serie converge se $|4\log x| < 1$, cioé $e^{-1/4} < x < e^{1/4}$, mentre non converge se $|4\log x| \geq 1$.

Per ogni $e^{-1/4} < x < e^{1/4}$ la somma della serie è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (4\log x)^k = \frac{1}{1-4\log x} - 1 = \frac{4\log x}{1-4\log x}\,.$$

1 - Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{2} \left(e^{x/3} - e^{\sqrt[3]{x}}\right)\, dx\,.$$

....

In primo luogo si osservi che

$$\int_{-1}^{2} e^{x/3} dx = 3[e^{x/3}]_{-1}^{2} = 3(e^{2/3} - e^{-1/3})\,.$$

Posto $t = \sqrt[3]{x}$, integrando per sostituzione si ottiene

$$\int_{-1}^{2} e^{\sqrt[3]{x}} dx = 3\int_{-1}^{\sqrt[3]{2}} t^2 e^t dt\,.$$

Inoltre, integrando per parti due volte si ha

$$\int_{-1}^{\sqrt[3]{2}} t^2 e^t dt = \left[e^t(t^2 - 2t + 2)\right]_{-1}^{\sqrt[3]{2}} = e^{\sqrt[3]{2}}(\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 2) - 5e^{-1}\,.$$

In conclusione

$$\int_{-1}^{2} \left(e^{x/3} - e^{\sqrt[3]{x}}\right)\, dx = 3(e^{2/3} - e^{-1/3}) - 3e^{\sqrt[3]{2}}(\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 2) + 15e^{-1}\,.$$

---

2 - Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{|\log|x||}\,.$$

. . . .

In primo luogo si osservi che f è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \notin \{0, -1, 1\}$.

Al fine di studiare la funzione è opportuno osservare che f è pari, e quindi basta studiarla per $x > 0$.

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\log x}\,, & \text{se } 0 < x < 1\,, \\ \dfrac{1}{\log x}\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

I limiti agli estremi del dominio sono dati da

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty\,;$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0\,;$$

ne segue che la retta $x = 1$ è un asintoto verticale e l'asse $y = 0$ è un asintoto orizzontale. Inoltre, si osservi che prolungando f per continuità in 0 (ponendo $f(0) = 0$), la funzione cosi ottenuta ha nel punto 0 un minimo assoluto.

Si noti ora che la derivata prima di f è data da

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\log x)^2}\,, & \text{se } 0 < x < 1\,, \\ -\dfrac{1}{x(\log x)^2}\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

Pertanto, la funzione f è monotona strettamente crescente in $]0,1[$, mentre f risulta monotona strettamente decrescente in $]1,+\infty[$.

La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{\log x(\log x + 2)}{x^2(\log x)^4}\,, & \text{se } 0 < x < 1\,, \\ \dfrac{\log x(\log x + 2)}{x^2(\log x)^4}\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

Pertanto, $x = e^{-2}$è un punto di flesso, f è concava negli intervalli $]0, e^{-2}]$, mentre f è convessa in $]e^{-2}, 1[$ e $]1, +\infty[$.

3 - Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+1/n^2} \,.$$

. . . .

La serie assegnata è a termini positivi, di conseguenza può solo convergere o divergere positivamente; poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+1/n^2} = 1 \,,$$

la serie è divergente, in quanto non è verificata la condizione necessaria alla convergenza.

---

4 - Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{4n}}{(n^4-1)^n} \,.$$

. . . .

Utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 - \frac{1}{n^3} \leq \left(1 - \frac{1}{n^4}\right)^n < 1 \,,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{4n}}{(n^4-1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n^4}\right)^n} = 1 \,.$$

1 - Calcolare l'integrale

$$\int_0^3 x \log \big|(x+1)(x-4)\big| \; dx \,.$$

. . . .

In primo luogo si osservi che

$$\int_0^3 x \log|(x+1)(x-4)| dx = \int_0^3 x \log|x+1| dx + \int_0^3 x \log|x-4| dx =$$

$$\int_0^3 x \log(x+1) dx + \int_0^3 x \log(4-x) dx \;.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_0^3 x \log(x+1) dx = \big[\frac{x^2}{2}\log(x+1)\big]_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2}{x+1} dx = -\frac{3}{4} + 4\log 4 \,.$$

Inoltre, con procedimento analogo al precedente si ha

$$\int_0^3 x\log(4-x)dx = -\frac{33}{4} + 8\log 4 \ .$$

In conclusione,

$$\int_0^3 x\log|(x+1)(x-4)|dx = -9 + 12\log 4 \ .$$

---

2 - Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{1-\operatorname{tg} x}\,.$$

....

Periodicità

La funzione è periodica di periodo π, e quindi basta studiarla nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Dominio.

La funzione è definita per

$$1 - \operatorname{tg} x > 0,$$

cio per $-\pi/2 < x \leq \pi/4$.

Eventuali zeri.

La funzione si annulla in $\pi/4$.

Comportamento ai limiti. Si osservi che

$$\lim_{x\to(-\pi/2)+} \sqrt{1-\operatorname{tg} x} = +\infty\,,$$

in quanto la funzione è positiva.

Derivata prima. Massimi, minimi relativi.

$$f'(x) = -\frac{1}{2\cos^2 x(1-\operatorname{tg} x)^{1/2}}.$$

Si annulla in $x = \pi$ e $f(\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ è un minimo relativo. Nell'intervallo considerato la derivata prima esiste sempre, pertanto non vi sono altri punti da esaminare.

Derivata seconda. Concavità, convessità. Flessi.

$$f''(x) = -\frac{\cos^2 x + 2\cos x - 3}{4(1-\cos x)^{5/2}} = \frac{\cos x + 3}{4(1-\cos x)^{3/2}} \ .$$

La derivata seconda è sempre positiva, e quindi la funzione è convessa in $(0, 2\pi)$.

Inoltre $f(\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ è un minimo assoluto, e il codominio della funzione è $[1/\sqrt{2}, +\infty)$.

---

3 - Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{(3x-x^3)k},$$

al variare del parametro $x \in \mathbf{R}$.

. . . .

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione e^{3x-x^3}; di conseguenza converge solo per $e^{3x-x^3} < 1$, cioè $3x - x^3 < 0$.

In conclusione, la serie assegnata converge per $-\sqrt{3} < x < 0$ oppure $x > \sqrt{3}$.

1 - Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in [-2, 3]$ in modo che si abbia

$$\int_{-2}^{3} |x-\alpha|\, dx = \frac{17}{2}.$$

. . . .

Si osservi che

$$\int_{-2}^{3} |x-\alpha|\, dx = \int_{-2}^{\alpha} (\alpha-x)\, dx + \int_{\alpha}^{3} (x-\alpha)\, dx = \left[\alpha x - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{\alpha} + \left[\frac{x^2}{2} - \alpha x\right]_{\alpha}^{3} = \alpha^2 - \alpha + \frac{13}{2}.$$

Pertanto i valori richiesti del parametro α devono verificare l'equazione

$$\alpha^2 - \alpha + \frac{13}{2} = \frac{17}{2},$$

cioè $\alpha = -1$ e $\alpha = 2$.

---

2 - Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}.$$

. . . .

Periodicità

La funzione è periodica di periodo π, e quindi basta studiarla nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Dominio.

La funzione è definita per

$$1 - \operatorname{tg} x > 0,$$

cioè per $-\pi/2 < x \leq \pi/4$.

Eventuali zeri.

La funzione si annulla in $\pi/4$.

Comportamento ai limiti. Si osservi che

$$\lim_{x\to(-\pi/2)+} \sqrt{1-\operatorname{tg} x} = +\infty\,,$$

in quanto la funzione è positiva.

Derivata prima. Massimi, minimi relativi.

$$f'(x) = -\frac{1}{2\cos^2 x(1-\operatorname{tg} x)^{1/2}} = -\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{2(1-\operatorname{tg} x)^{1/2}}.$$

Nell'intervallo considerato la derivata prima esiste sempre. La funzioneè monotona decrescente.

Derivata seconda. Concavità, convessità. Flessi.

$$f''(x) = (1+\operatorname{tg}^2 x)\frac{3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 1}{4(1-\operatorname{tg} x)^{3/2}}\ .$$

La derivata seconda si annulla per $3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 1 = 0$, cioè $\operatorname{tg} x = \dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$. Si osservi che $(2+\sqrt{7})/3 > 1$, e quindi è da scartare. Pertanto f ha un punto di flesso in $x = \operatorname{arctg}((2-\sqrt{7})/3)$ e la funzione è convessa in $(-\pi/2, \operatorname{arctg}((2-\sqrt{7})/3))$ e concava $(\operatorname{arctg}((2-\sqrt{7})/3), \pi/4)$.

Un grafico approssimativo di f è il seguente

---

3 - Stabilire i valori del parametro $x \in \mathbf{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\pi x)^k\,,$$

converge e calcolare la somma.

. . . .

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione πx; di conseguenza converge solo per $|\pi x| < 1$, cioè $|x| < 1/\pi$.

Inoltre, per ogni $|x| < 1/\pi$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\pi x)^k = \frac{1}{1-\pi x} - 1 = \frac{\pi x}{1-\pi x}\,.$$

1 - Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{4} x\ e^{|x-3|}\ dx\,.$$

. . . .

Si osservi che

$$\int_{-1}^{4} xe^{|x-3|}dx = \int_{-1}^{3} xe^{3-x}dx + \int_{3}^{4} xe^{x-3}\,dx\,,$$

$$\int_{-1}^{3} xe^{3-x}dx = e^3 \int_{-1}^{3} xe^{-x}dx = -e^{3-x}(x+1)|_{-1}^{3} = -4\,,$$

$$\int_{3}^{4} xe^{x-3}dx = e^{-3} \int_{-1}^{3} xe^{x}dx = e^{x-3}(x-1)|_{3}^{4} = 3e-2\,.$$

In conclusione,

$$\int_{-1}^{4} xe^{|x-3|}dx = 3(e-2)\,.$$

---

2 - Studiare la funzione

$$f(x) = \log|x^3 + 16x|\,.$$

....

In primo luogo si osservi che f è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$.

Al fine di studiare la funzione è opportuno osservare che f è pari, e quindi basta studiarla per $x > 0$.

I limiti agli estremi del dominio sono dati da

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,;$$

ne segue che la retta $x = 0$ è un asintoto verticale.

Si noti ora che la derivata prima di f è data da

$$f'(x) = \frac{3x^2+16}{x^3+16x}\,, \qquad x > 0\,.$$

Pertanto, la funzione f è monotona strettamente crescente in $]0, +\infty[$.

La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \frac{6x(x^3+16x) - (3x^2+16)^2}{(x^3+16x)^2} = -\frac{3x^4+256}{(x^3+16x)^2}\,, \qquad x > 0\,;$$

di conseguenza, f è concava in $]0, +\infty[$.

3 - Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} (x^2 - 3x + 3)^{2n} = 0\,.$$

. . . .

Si deve imporre

$$|(x^2 - 3x + 3)^2| < 1\,.$$

Essendo $(x^2 - 3x + 3)^2 \geq 0$, si ha

$$|x^2 - 3x + 3| < 1\,,$$

e quindi $1 < x < 2$.

1 - Calcolare l'integrale

$$\int_{-3}^{-1} \log(|x^2 + 2x| - x)\ dx\,.$$

. . . .

Si osservi che

$$\int_{-3}^{-1} \log(|x^2 + 2x| - x)\ dx = \int_{-3}^{-2} \log(x^2 + x)\ dx + \int_{-2}^{-1} \log(-x^2 - 3x)\ dx\,.$$

Integrando per parti, si ha

$$\int_{-3}^{-2} \log(x^2+x)\ dx = \left[x\log(x^2+x)\right]_{-3}^{-2} - \int_{-3}^{-2} \frac{2x+1}{x+1}\ dx = \log 2 + 3\log 3 - \int_{-3}^{-2} \left[2 - \frac{1}{x+1}\right]\ dx =$$

$$3\log 3 - 2\,,$$

$$\int_{-2}^{-1} \log(-x^2-3x)\ dx = \left[x\log(-x^2-3x)\right]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} \frac{2x+3}{x+3}\ dx = \log 2 - \int_{-2}^{-1} \left[2 - \frac{3}{x+3}\right]\ dx =$$

$$4\log 2 - 2\,.$$

In conclusione,

$$\int_{-3}^{-1} \log(|x^2 + 2x| - x)\ dx = 3\log 3 + 4\log 2 - 4\,.$$

---

2 - Studiare la funzione

$$f(x) = \log \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}\,.$$

. . . .

L' insieme di definizione è l'insieme dei numeri reali x tali che $\operatorname{sen} x > 0$, ossia

$$\{x \in \mathbf{R} : 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbf{Z}\}.$$

Per la periodicità, si può studiare la funzione in $(0, \pi)$. Si osservi che, essendo $\operatorname{sen} x \leq 1$ per ogni x reale, la funzione è negativa e nulla nei punti in cui $\operatorname{sen} x = 1$ ossia (nell'intervallo $(0, \pi)$) nel punto $x = \frac{\pi}{2}$, punto di massimo assoluto.

Per i limiti si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \log \sqrt[3]{\operatorname{sen} x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to \pi^-} \log \sqrt[3]{\operatorname{sen} x} = -\infty.$$

La derivata prima

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

si annulla per $x = \frac{\pi}{2}$, punto di massimo assoluto in cui si annulla anche la funzione.

La derivata seconda

$$f''(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

è sempre negativa, e dunque la funzione è concava.

---

3 - Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n \to \infty} n(\pi - 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{n} + 5n)).$$

. . . .

In primo luogo si osservi che il limite assegnato è una forma indeterminata del tipo $\infty \cdot 0$.

È conveniente applicare il teorema di de l'Hôpital al rapporto di funzioni reali

$$\frac{\pi - 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{x} + 5x)}{1/x}.$$

Il limite del rapporto delle derivate è dato da

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{1 + (\sqrt{x} + 5x)^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 5 \right) = \frac{2}{5},$$

e quindi per il teorema di de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{x} + 5x)}{1/x} = \frac{2}{5}.$$

In conclusione, il valore del limite assegnato è $\frac{2}{5}$.

Si pu anche calcolare il limite assegnato senza applicare il teorema di de l'Hôpital, ma utilizzando l'uguaglianza

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{per ogni} \quad x > 0$$

e il limite notevole

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = 1\,.$$

1 - Calcolare l'integrale

$$\int_{11/5}^{3} |\log(x^2-4)|\ dx\,.$$

. . . .

Si osservi che

$$\int_{11/5}^{3} |\log(x^2-4)|\ dx = -\int_{11/5}^{\sqrt{5}} \log(x^2-4)\ dx + \int_{\sqrt{5}}^{3} \log(x^2-4)\ dx\,.$$

Poichè $11/5 > 2$, si pu scrivere

$$\int \log(x^2-4)\ dx = \int \log(x-2)\ dx + \int \log(x+2)\ dx\,.$$

Integrando per parti, si ha

$$\int \log(x-2)\ dx = (x-2)\log(x-2) - x + c\,,$$

$$\int \log(x+2)\ dx = (x+2)\log(x+2) - x + c\,,$$

e quindi

$$\int \log(x^2-4)\ dx = x\log(x^2-4) + 2\log\frac{x+2}{x-2} - 2x + c \qquad c \in \mathbf{R}\,.$$

In conclusione,

$$\int_{11/5}^{3} |\log(x^2-4)|\ dx = -8\log(\sqrt{5}+2) + 4\sqrt{5} + \frac{21}{5}\log(21) + \frac{3}{5}\log 5 - \frac{52}{5}\,.$$

---

2 - Studiare la funzione

$$f(x) = e^{|x^2-9|+3x}\,.$$

. . . .

La funzione assegnata $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Per i limiti si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \, .$$

Si osservi ora che

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2-9+3x} & \text{se} \quad x \leq -3 \quad \text{oppure} \quad x \geq 3 \, , \\ e^{-x^2+9+3x} & \text{se} \quad -3 < x < 3 \, . \end{cases}$$

La derivata prima è data da

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x^2-9+3x}(2x+3) & \text{se} \quad x < -3 \quad \text{oppure} \quad x > 3 \, , \\ e^{-x^2+9+3x}(-2x+3) & \text{se} \quad -3 < x < 3 \, , \end{cases}$$

e f non è derivabile nei punti -3 e 3.

Pertanto f è decrescente in $]-\infty, -3[$ mentre è crescente in $]3, +\infty[$. Inoltre, f è crescente in $]-3, 3/2[$, è decrescente in $]3/2, 3[$, e quindi il punto $x = 3/2$ è di massimo relativo per f.

La derivata seconda è data da

$$f''(x) = \begin{cases} e^{x^2-9+3x}[(2x+3)^2 + 2] & \text{se} \quad x < -3 \quad \text{oppure} \quad x > 3 \, , \\ e^{-x^2+9+3x}(4x^2 - 12x + 7) & \text{se} \quad -3 < x < 3 \, , \end{cases}$$

e di conseguenza f è convessa negli intervalli $]-\infty, -3[$ e $]3, +\infty[$, mentre f è convessa negli intervalli $]-3, (3-\sqrt{2})/2[$ e $](3+\sqrt{2})/2, 3[$, ed è concava in $](3-\sqrt{2})/2, (3+\sqrt{2})/2[$. Pertanto i punti $(3 \pm \sqrt{2})/2$ sono di flesso per f.

---

3 - Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos\left(\sqrt{\pi x}/3\right)}{x} \, .$$

. . . .

In primo luogo si osservi che il limite assegnato è una forma indeterminata del tipo $\dfrac{0}{0}$.

È opportuno tener presente il limite notevole

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2} \, .$$

Infatti, posto $t = \sqrt{\pi x}/3$, si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos\left(\sqrt{\pi x}/3\right)}{x} = \frac{\pi}{9} \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{\pi}{18} \, .$$