

E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
E7	
E8	
E9	
E10	

Prova Scritta del 14.07.2015: Compito A

Nome:

Cognome:

Matricola:

Esercizio 1

[3 punti]

Calcolare l'integrale

$$\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{|\sin x|}{\cos x} dx$$

Risoluzione

$$\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{|\sin x|}{\cos x} dx = - \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \ln 2 - \ln 2 = -\frac{1}{2} \ln 2$$

Esercizio 2

[3 punti]

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx)^n}{(\pi)^n}, \text{ risulta}$$

a) divergente

b) convergente

Risoluzione

Risolvendo l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx)^n}{(\pi)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n},$$

la serie risulta pertanto convergente.

Esercizio 3

[3 punti]

Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \ln \ln(x^2 + e^2)$$

Risoluzione

$$x^2 + e^2 > 1 \quad \forall x.$$

L'insieme di definizione è tutto l'asse reale.

\mathbb{R}

Esercizio 4

[3 punti]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} =$$

a) 0

b) 1

c) non esiste

d) nessuna delle precedenti

Risoluzione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = 1$$

Esercizio 5

[3 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})\sqrt{x}$$

Risoluzione

Per $x > 0$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}) \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} \sqrt{x} &= \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{2}{x}})} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})\sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}) \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} \sqrt{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{2}{x}})} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 6

[3 punti]

Determinare massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x) = e^{-x^2}$$

nell'intervallo $[-1, 2]$

Risoluzione

La funzione ammette massimo e minimo assoluto per il teorema di Weierstrass, Dallo studio risulta $x_{min} = 2$ $f(2) = e^{-4}$ $x_{max} = 0$ $f(0) = 1$. Pertanto il minimo assoluto vale e^{-4} e il massimo assoluto vale 1.

Esercizio 7

[3 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$$

Risoluzione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(\ln x)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(\ln x)} = 1$$

Esercizio 8

[3 punti]

Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 25y = 0$$

Risoluzione

Dalle soluzioni del polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + 25 = 0,$$

si ottiene $y(x) = c_1 \cos(5x) + c_2 \sin(5x)$

Esercizio 9

[3 punti]

Per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|\sin(\frac{\pi}{2}n)| > 0$$

VERO

FALSO

Risoluzione (giustificare la risposta)

Falso per $n = 2$. In generale per n pari.

Esercizio 10

[3 punti]

Calcolare $(1 + i)^3$

Risoluzione

$$(1 + i)^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$$