ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = e^{|x|}$$

con $x \in [-\pi, \pi)$ prolungata per periodicità in $\mathbf{R}$, determinare la serie di Fourier.
Risoluzione: la funzione $f(x)$ è pari, dunque $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$. Mentre

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|}dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{x}\ dx = \frac{2}{\pi}[e^{\pi} - 1]$$

dove si è usato che per una funzione pari g qualunque si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} g(x)dx.$$

Analogamente:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|}\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{x}\cos(kx)dx; \tag{1}$$

calcoliamo preliminarmente il seguente integrale indefinito:

$$\int e^{x}\cos(kx)dx = e^{x}\cos(kx) + k\int e^{x}\sin(kx)dx =$$

$$= e^{x}\cos(kx) + ke^{x}\sin(kx)dx - k^2\int e^{x}\cos(kx)dx$$

avendo operato due volte un'integrazione per parti. Dalla precedente, portando l'ultimo termine a primo membro otteniamo:

$$\int e^{x}\cos(kx)dx = \frac{1}{1+k^2}[e^{x}\cos(kx) + ke^{x}\sin(kx)].$$

Dunque si ha:

$$a_k = \frac{2}{\pi(1+k^2)}[e^{\pi}\cos(k\pi) + ke^{\pi}\sin(k\pi) - 1] =$$

$$\frac{2}{\pi(1+k^2)}[e^{\pi}(-1)^k - 1]$$

Dunque la serie di Fourier è:

$$S(x) = \frac{1}{\pi}[e^{\pi} - 1] + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{1+k^2}[e^{\pi}(-1)^k - 1]\cos(kx).$$

L'integrale in (1) poteva essere calcolato più agevolmente usando l'identità di Eulero:

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}.$$

ESERCIZIO 2. Determinare eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione

$$f(x, y) = e^{-2x^2-4y^2}$$

Risoluzione: gli eventuali punti critici sono soluzione di

$$f_x(x, y) = (-4x)e^{-2x^2-4y^2} = 0, \qquad f_y(x, y) = (-8y)e^{-2x^2-4y^2} = 0$$

ovviamente questo avviene solo se $x = 0$ ed $y = 0$.
Al fine di caratterizzare la natura di tale punto critico, calcoliamo le derivate successive.

$$f_{xx}(x, y) = (-4 + 16x^2)e^{-2x^2-4y^2}$$

$$f_{xx}(x, y) = (-8 + 64y^2)e^{-2x^2-4y^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = (-4x)(-8y)e^{-2x^2-4y^2} = 32\ xy\ e^{-2x^2-4y^2}$$

che calcolate in $(0, 0)$ danno:

$$f_{xx}(0, 0) = -4$$

$$f_{xx}(0, 0) = -8$$

$$f_{xy}(0, 0) = 0.$$

L'Hessiana $H(0, 0)$ ha determinante

$$detH(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}(0, 0)^2 = 32 > 0$$

e poichè $f_{xx}(0, 0) < 0$ allora $H(0, 0)$ risulta essere definita negativa, quindi abbiamo un massimo relativo.

ESERCIZIO 3. Calcolare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}7^2}{\pi^{n+3}} \left(x - \frac{1}{\pi}\right)^n \tag{2}$$

Risoluzione: poniamo

$$a_n = \frac{2^{n+1}7^2}{\pi^{n+3}}.$$

Applicando il criterio del rapporto otteniamo il raggio di convergenza R:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+2}7^2}{\pi^{n+4}} \frac{\pi^{n+3}}{2^{n+1}7^2} = \frac{2}{\pi}$$

dunque la serie converge per

$$\left|x - \frac{1}{\pi}\right| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi^2+2}{2\pi} < x < \frac{\pi^2+2}{2\pi}$$

Non converge per

$$x < \frac{-\pi^2+2}{2\pi} \vee x > \frac{\pi^2+2}{2\pi}$$

Resta dunque da vedere cosa accade per $x - 1/\pi = \pm\pi/2$. Sostituendo nell'espressione (2) si ottiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}\cdot 7^2}{\pi^{n+3}} (\pm 1)^n \frac{\pi^n}{2^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 7^2}{\pi^3} (\pm 1)^n,$$

in ambedue i casi la serie non converge.

ESERCIZIO 4. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x^2y^2\, dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \big| 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$$

Risoluzione: D è un dominio normale all'asse x, possiamo ridurre l'integrale doppio come:

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} y^2 dy\right) x^2\, dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\left(x^3 - x^6\right) x^2\, dx =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 x^5 - x^8 dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{54}.$$