Prova Scritta del 22.12.2016: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

E1	
E2	
E3	
E4	

Esercizio 1

[8 punti]

Data la funzione

$$f(x) = \max\{0, x\}$$

per $x \in [-\pi, \pi)$ prolungata per periodicità in $\mathbb{R}$, determinare le serie di Fourier.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Si vede immediatamente che $f(x) = x$ per $x \in [0, \pi)$ ed $f(x) = 0$ se $x \in [-\pi, 0)$. Dunque si ha:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\, dx = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

analogamente

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin(kx)}{k}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(kx)}{k}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi k^2}\cos(kx)\Big|_0^\pi = \frac{1}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right]$$

avendo operato un'integrazione per parti. Analogamente

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos(kx)}{k}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{k}dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\pi\frac{(-1)^k}{k}\right] = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

poiché $cos(k\pi) = (-1)^k$. Dunque possiamo scrivere la serie di Fourier S_f associata alla funzione

$$S_f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)\ x) + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx).$$

Esercizio 2

[7 punti]

Classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^2e^x + y^2e^y$$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$f_x(x, y) = (2x + x^2)e^x = 0 \quad , \quad f_y(x, y) = (2y + y^2)e^y$$

che sono verificate se e solo se:

$$(2 + x)x = 0 \quad , \quad (2 + y)y = 0$$

otteniamo i seguenti punti $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$ e $(-2, -2)$.
Per determinare il carattere di tali punti critici calcoliamo le derivate successive:

$$f_{xx} = (2 + 4x + x^2)e^x \quad , \quad f_{yy} = (2 + 4y + y^2)e^y$$

ed ovviamente $f_{xy} = 0$. Dunque calcoliamo il determinante dell'Hessiana $H(x, y)$ in tali punti:

$$\det H(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}(0, 0)^2 = 4$$

essendo $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ si ha che $(0,0)$ è un minimo relativo per f.
Si procede nello stesso modo per gli altri punti, e si ha:

$$\det H(-2,0) = -4e^{-2} < 0$$

ed

$$\det H(0,-2) = -4e^{-2} < 0$$

da cui ricaviamo che $(0,-2)$ e $(-2,0)$ sono di sella per f. Per l'ultimo punto critico individuato si ha:

$$\det H(-2,-2) = 4e^{-4} > 0$$

e poiché $f_{xx}(-2,-2) = -2e^{-2} < 0$ si ha un massimo relativo per f.

Esercizio 3 **[7 punti]**

Utilizzando la definizione di limite verificare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^3 + 5x^2 + 5y^2}{x^2 + y^2} = 5$$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Bisogna verificare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un δ che dipende da ϵ tale che per ogni (x,y) appartenenti a $B_\delta = \{(x,y) : x^2 + y^2 < \delta^2\}$ si ha

$$\left|\frac{2y^3 + 5x^2 + 5y^2}{x^2 + y^2} - 5\right| < \epsilon$$

ovvero

$$\left|\frac{2y^3 + 5x^2 + 5y^2}{x^2 + y^2} - 5\right| \le \frac{|2y^3|}{x^2 + y^2} \le \frac{2|y|(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2|y|$$

$$2|y| \le 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta$$

Scegliamo

$$\delta = \frac{\epsilon}{2}$$

Esercizio 4 **[8 punti]**

Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D e^{x^2+y^2} dxdy$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\}$$

Risoluzione (giustificare la risposta)

D è il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 2, dunque usando le coordinate polari e poiché il determinante Jacobiano della trasformazione è pari a ρ si ottiene:

$$\int\int_D e^{x^2+y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 e^{\rho^2} \rho d\rho \right) =$$

$$2\pi \int_0^2 e^{\rho^2} \rho d\rho = \pi e^{\rho^2}\Big|_0^2 = \pi[e^4 - 1]$$