ANALISI MATEMATICA II (Ing. Gestionale)
APPELLO STR 01.04.2015 A.A.2014/15

MOTIVARE CHIARAMENTE TUTTE LE RISPOSTE Tempo 2 ore

---

1) Data l'equazione differenziale:

$$y'' + 2\beta y' + 9y = e^{-x} \quad , \quad \beta \in \mathbb{R}$$

determinarne l'integrale generale al variare di β. Trovare, inoltre, la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 9y = e^{-x} \\ y(0) = \frac{1}{10} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

---

soluzione

– soluzione equazione omogenea associata, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ **costanti arbitrarie**,

$$\begin{array}{rcll} y_h(x) &=& (c_1 + c_2 x)e^{-3x} \ , & \beta = 3 \\ y_h(x) &=& (c_1 + c_2 x)e^{3x} \ , & \beta = -3 \\ y_h(x) &=& \left(c_1 e^{-\sqrt{\beta^2-9}x} + c_2 e^{-\sqrt{\beta^2-9}x}\right) e^{-\beta x} \ , & \beta \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty) \\ y_h(x) &=& \left(c_1 \cos(\sqrt{9-\beta^2}x) + c_2 \sin(\sqrt{9-\beta^2}x)\right) e^{-\beta x} \ , & \beta \in (-3, 3). \end{array}$$

– Soluzione particolare:

$$\begin{array}{rcll} y_p(x) &=& \frac{1}{5-\beta} e^{-x} \ , & \beta \neq 5 \\ y_p(x) &=& \frac{1}{8} x e^{-x} \ , & \beta = 5. \end{array}$$

– Quindi l'integrale generale, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ **costanti arbitrarie**, è dato da

$$\begin{array}{rcll} y(x) &=& (c_1 + c_2 x)e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{-x} \ , & \beta = 3 \\ y(x) &=& (c_1 + c_2 x)e^{3x} + \frac{1}{16} e^{-x} \ , & \beta = -3 \\ y(x) &=& \left(c_1 e^{-\sqrt{\beta^2-9}x} + c_2 e^{-\sqrt{\beta^2-9}x}\right) e^{-\beta x} + \frac{1}{2(5-\beta)} e^{-x} \ , & \beta \in (-\infty, -3) \cup (3, 5) \cup (5, \infty) \\ y(x) &=& e^{-x}\left(c_1 + \frac{x}{8}\right) + c_2 e^{-9x} \ , & \beta = 5 \\ y(x) &=& \left(c_1 \cos(\sqrt{9-\beta^2}x) + c_2 \sin(\sqrt{9-\beta^2}x)\right) e^{-\beta x} + + \frac{1}{2(5-\beta)} e^{-x} \ , & \beta \in (-3, 3). \end{array}$$

– La soluzione (**unica**) del problema di Cauchy, $\beta = 0$, è

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{30}\left(\sin(3x) + 3e^{-x}\right)}$$

---

2) Data la funzione $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) := (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 1)$,

a) determinarne l'insieme di definizione $E \subseteq \mathbb{R}^2$;

b) determinare i punti di stazionarietà nell'insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$;

c) classificare i punti di stazionarietà ottenuti e determinare $f(E) \subseteq \mathbb{R}$.

d) Dato il compatto $D = [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2$, determinare $f(D) \subset \mathbb{R}$.

e) Riconoscere (citando il teorema relativo) che $f(D) = [m, M]$ dove, rispettivamente, m ed M indicano il minimo ed il massimo valore assunto da f in D.

---

soluzione

a) $E \equiv \mathbb{R}^2$

b) I punti di stazionarietà sono individuati dalla condizione $\nabla f(x,y) = 0$ cioè

$$\begin{cases} 2x(2x^2+2y^2-5) & = 0 \\ 2y(2x^2+2y^2-5) & = 0 \end{cases}$$

Quindi sono di stazionarietà l'origine $O \equiv (0,0)$ e **tutti** i punti della circonferenza $\mathcal{C} : 2x^2 + 2y^2 = 5$.

c)
- $O \equiv (0,0)$ **punto di massimo relativo proprio**, $f(0,0) = 4$,
- **tutti** i punti della circonferenza $\mathcal{C} : 2x^2 + 2y^2 = 5$ sono **tutti punti di minimo relativo** (non proprio), $f(x,y)|_{\mathcal{C}} = -9/4$.
- $f(E) = [-9/4, +\infty)$.

d) Tutti i punti di stazionarietà sono punti interni al compatto $D = [-2,2] \times [-2,2] \subset \mathbb{R}^2$, quindi, per determinare i valori **minimo** e **massimo** che f assume su D, dobbiamo determinare i punti di stazionarietà di $f(x,y)$ $\forall (x,y) \in \partial D$. La frontiera di D è $\partial D = \cup_{k=1}^{k=4} \gamma_k$, dove

$$\begin{array}{lll} \gamma_1 & \equiv (2,t), & t \in [-2,2] \\ \gamma_2 & \equiv (-t,2), & t \in [-2,2] \\ \gamma_3 & \equiv (-2,-t), & t \in [-2,2] \\ \gamma_4 & \equiv (t,-2), & t \in [-2,2]. \end{array}$$

Ponendo $F(t) := f(2,t)$, si ottiene $F(t) := t^2(t^2+3), t \in (-2,2)$ e, quindi, $F'(t) = 0$ quindi $t = 0$, mentre $F'(t) > 0$ per $t > 0$ e $F'(t) < 0$ per $t < 0$. In corrispondenza a $t = 0$, $F(t)$ assume il valore **minimo** $F(0) = f(2,0) = 0$. Siccome questo valore è maggiore di $m = -9/4$, minimo assunto da f in $(0,0)$, punto interno a D, $m = -9/4$ rappresenta il valore minimo assunto da f in tutto D. Lo studio si completa calcolando $F(\pm 2) = 28$. Lo stesso calcolo si ripete identico per f vincolata a $\gamma_k, k = 2,3,4$.

$$\boxed{F(D) = [-9/4, 28]}.$$

e) Poichè $f : R^2 \to \mathbb{R}$ è continua in tutto $\mathbb{R}^2$ e $D \subset \mathbb{R}^2$ è un **compatto** (i.e. insieme **chiuso** e **limitato**) il Teorema di Weierstrass afferma che f ammette in D massimo e minimo e, quindi $f(D) = [m, M]$.

---

3) Data la funzione di variabile reale

$$f(x) = \frac{1}{(4-x^2)^2} \tag{1}$$

determinare:

a) l'insieme di definizione $E \subseteq \mathbb{R}$;

b) lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$, precisandone "a priori" la regione di convergenza B;

c) indicarne, poi, un sottoinsieme $A \subset B$ nel quale la serie trovata converge totalmente. Dimostrare la convergenza totale in A.

d) lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $\tilde{x}_0 = 4$, precisandone "a priori" la regione di convergenza, della funzione f.

---

soluzione

a) $E \equiv \mathbb{R}\ \{\pm 2\}$

b) Se il punto iniziale dello sviluppo in serie di Taylor è l'origine $x_0 = 0$, il raggio di convergenza è $r = 2$ pari alla distanza dell'oringine dai due punti ± 2 nei quali la funzione assegnata non è definita. Per determinare lo sviluppo in serie, si ricordi la serie geometrica e si noti che

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4-x^2}\right] = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$$

scrivere, quindi lo sviluppo in serie relativo alla funzione $g(x) = (4-x^2)^{-1}$ e, ricordando che lo sviluppo in serie di Taylor è **uniformemente convergente** per $|x - x_0| < r$, ed il Teorema di *derivazione per serie*, ricavare lo sviluppo in serie di Taylor richiesto. Verificare, quindi che il raggio di convergenza è pari a 2, come previsto a priori.

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k \quad , \quad \left|\frac{x^2}{4}\right| < 1 \Longleftrightarrow |x| < 2 \Longrightarrow B = (-2,2). \tag{2}$$

N.B. Si ottiene lo stesso risultato se si utilizza la (6); infatti

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x/2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k \quad , \quad \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Longleftrightarrow |x| < 2 \tag{3}$$

Quindi $B_1 = (-2, 2)$. Analogamente

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x/2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^k \quad , \quad \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Longleftrightarrow |x| < 2 \tag{4}$$

Quindi $B_2 = (-2, 2) \equiv B_1$. Sostituendo in (6), le due espressioni (3) e (4), si ricava, combinando le due serie :

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left[1+(-1)^k\right]\left(\frac{x}{2}\right)^k \quad , \quad \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Longleftrightarrow |x| < 2 \tag{5}$$

Poichè

$$\boxed{1+(-1)^k = \begin{cases} 0 & k = \quad 2m+1 \\ 2 & k = \quad 2m \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{N}_0}$$

semplificando si verifica il risultato ottenuto in (2).

c) Un sottoinsieme di convergenza totale è $A = [-p, p], \forall p \in (0, 2)$. La dimostrazione si basa sui risultati noti per la serie geometrica.

d) Innanzitutto, il raggio di convergenza $\tilde{r} = \min\{|\tilde{x}_0 - 2|, |\tilde{x}_0 + 2|\}$; nel caso in esame $r = \min\{|2-4|, |-2-4|\} = 2$. Notato che

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\right] \tag{6}$$

e

$$\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2+(x-4)} \quad , \quad \frac{1}{2+x} = \frac{1}{6+(x-4)}$$

Quindi

$$\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2+(x-4)} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(x-4)/2}\right] = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x-4}{2}\right)^k \quad , \quad \left|\frac{x-4}{2}\right| < 1 \Longleftrightarrow |x-4| < 2$$

Quindi $\tilde{B}_1 = (2, 6)$. Analogamente

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{6+(x-4)} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1+(x-4)/6}\right] = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x-4}{6}\right)^k \quad , \quad \left|\frac{x-4}{6}\right| < 1 \Longleftrightarrow |x-4| < 6$$

Quindi $\tilde{B}_2 = (-2, 10)$. Infine, $\tilde{B} = \tilde{B}_1 \cap \tilde{B}_2 = (2, 6) \cap (-2, 10) \equiv (2, 6)$.
Anche in questo caso si applica il teorema di derivazione per serie.