Ing. energetica, 2013-14, soluzioni

19/1/2015

Esercizio 1

Sia data la funzione $f(x,y) = x^2 + y\sin x$.

Studiare i punti critici di f e trovarne massimo e minimo globale, o eventualmente estremo superiore ed inferiore, nel suo dominio e nel rettangolo $R = [0,\pi/2] \times [0,1]$.

Soluzione

Dato che $\lim_{y\to\pm\infty} f(\pi/2,y) = \lim_{y\to\pm\infty}(y + \pi^2/4) = \pm\infty$, f è illimitata. Quindi non ha massimo né minimo globale, e gli estremi superiore ed inferiore valgono rispettivamente $+\infty$, e $-\infty$.

Il gradiente di f è uguale a

$$\nabla f(x,y) = (2x + y\cos x, \sin x),$$

e si avranno punti critici in corrispondenza delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + y\cos x = 0, \\ \sin x = 0, \end{cases}$$

ovvero nei punti

$$P_k = \left(k\pi, (-1)^{k+1} 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Per studiare la natura di questi punti, calcoliamo l'hessiano di f, che risulta essere pari a

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y\sin x & \cos x \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$\det(\mathrm{H}\, f(P_k)) = -\cos^2(k\pi) < 0,$$

quindi tutti i punti critici sono di sella.

Essendo R un insieme compatto ed f una funzione continua, questa avrà in R massimo e minimo globale, che si troveranno sulla sua frontiera.

Questa può essere parametrizzata dalle 4 curve

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t, 0), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\
\gamma_2(t) &= \left(\frac{\pi}{2}, t\right), \quad t \in [0, 1], \\
\gamma_3(t) &= (t, 1), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\
\gamma_4(t) &= (0, t), \quad t \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Su di esse f vale

$$\begin{aligned}
f \circ \gamma_1(t) &= t^2, \\
f \circ \gamma_2(t) &= t + \frac{\pi^2}{4}, \\
f \circ \gamma_3(t) &= t^2 + \sin t, \\
f \circ \gamma_4(t) &= 0.
\end{aligned}$$

Quindi, dato che $f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2$ e $f \circ \gamma_3$ sono crescenti, e che $f \circ \gamma_4$ è costante, f ha in R minimo pari a 0 e massimo pari a $\frac{\pi^2}{4} + 1$.

Esercizio 2

Rappresentare in serie di Fourier, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica, di periodo $T = 2\pi$ individuata in $[-\pi, \pi)$ da

$$f(x) = (x^2 - \pi^2)^2$$

Studiare inoltre la convergenza della serie.

Soluzione

La serie cercata sarà data da

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n_0}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

con

$$\begin{aligned}
a_0 =& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - \pi^2)^2\, dx, \\
=& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^4 - 2x^2\pi^2 + \pi^4)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}\pi^2 x^3 + \pi^4 x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{16}{15}\pi^4,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2-\pi^2)^2\cos(nx)\,dx\\
=& \frac{1}{\pi}\left[(x^2-\pi^2)^2\frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}4x(x^2-\pi^2)\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right]\\
=& \frac{4}{n\pi}\left[(x^3-\pi^2 x)\frac{\cos(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(3x^2-\pi^2)\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right]\\
=& \frac{4}{n^2\pi}\left[-(3x^2-\pi^2)\frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}6x\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right]\\
=& \frac{24}{n^3\pi}\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right]\\
=& \frac{24}{n^3\pi}\left(-\pi\frac{(-1)^n}{n} - \pi\frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{48(-1)^{n+1}}{n^4}.\\
b_n =& 0.
\end{aligned}
$$

Quindi, dato che per il termine generico della serie vale

$$
|a_n\cos(nx)| = \left|\frac{48(-1)^n}{n^4}\cos(nx)\right| \le c\frac{1}{n^4} \quad \forall x\in\mathbb{R},
$$

e che

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} < \infty,
$$

la serie converge totalmente e quindi uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 3

Data la forma differenziale, per $\alpha > 0$,

$$
\omega = \left(\frac{y^\alpha}{\cos^2 x} + \cos x\right)dx + \tan x\,dy
$$

determinarne l'insieme di definizione, calcolare il valore di α per il quale ω è chiusa, per tale valore indicare un insieme aperto e connesso in cui ω è esatta e calcolarne la primitiva F tale che $F(0,0) = 1$.

Pararametrizzarne la frontiera dell'insieme $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \pi/4,\ 0 \le y \le \tan x\}$. Calcolare l'integrale di ω lungo ∂D senza eseguire ulteriori calcoli, e verificare il risultato ottenuto usando le formule di Gauss-Green.

Siano γ_1 e γ_2 le due porzioni in cui ∂D risulta divisa dai punti $O = (0,0)$ e $P = (\pi/4, 1)$. Calcolare l'integrale di ω da O a P lungo γ_1 e lungo γ_2, sia direttamente che facendo uso della funzione F.

Soluzione

La forma differenziale definita in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq (2k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$.

Perché ω sia chiusa, deve valere

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^\alpha}{\cos^2 x} + \cos x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\tan x,$$

ovvero

$$\frac{\alpha y^{\alpha-1}}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

perciò si dovrà avere $\alpha = 1$.

Quindi, per tale valore di α, ω sarà esatta in ogni sottoinsieme semplicemente connesso del suo dominio, come ad esempio l'insieme $\{(x, y) \in R^2 \mid |(x, y)| < 1\}$.

Per trovare la primitiva di ω, dato che

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \tan x,$$

si ha

$$F(x, y) = y \tan x + \phi(x).$$

Dato che

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{\cos^2 x} + \phi'(x) = \frac{y}{\cos^2 x} + \cos(x),$$

si ha

$$\phi(x) = \sin x + c \qquad \Rightarrow \qquad F(x, y) = y \tan x + \sin x + c.$$

Imponendo la condizione data, si ottiene il valore da assegnare a c, ovvero

$$F(0, 0) = c = 1 \qquad \Rightarrow \qquad F(x, y) = y \tan x + \sin x + 1.$$

La frontiera di ω è costituita da tre curve, quindi una sua parametrizzazione (antioraria) può essere data dalle funzioni

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= (t, 0), & t &\in [0, \pi/4], \\
\lambda_2(t) &= (\pi/4, t) & t &\in [0, 1], \\
\lambda_3(t) &= (\pi/4 - t, \tan(\pi/4 - t)), & t &\in [0, \pi/4].
\end{aligned}$$

L'insieme D è contenuto in un insieme in cui *omega* esatta, quindi l'integrale lungo la sua frontiera nullo.

Applicando le formule di Gauss-Green, si ha

$$\int_{\partial D^+} \omega = \int_D \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\cos^2 x} + \cos x\right) - \frac{\partial}{\partial x}\tan x\right] dx\,dy = \int_D 0\,dx\,dy = 0$$

Sia γ_1 la curva ottenuta dall'unione di λ_1 e λ_2 e γ_2 la curva ottenuta invertendo il verso di percorrenza di λ_3.

Si ha allora

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1}\omega =& \int_{\lambda_1}\omega + \int_{\lambda_2}\omega \\ =& \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(\frac{0}{\cos^2 t}+\cos t\right)1 + 0\tan t\right]\,dt \int_0^1\left[\left(2t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)0+1\right]\,dt \\ =& [\sin t]_0^{\pi/4} + [t]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}+1.\end{aligned}$$

Parametrizzando γ_2 con $\gamma_2(t) = (t, \tan t), t \in [0, \pi/4], siha$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2}\omega =& \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(\frac{\tan t}{\cos^2 t}+\cos t\right)1 + \tan t\,\frac{1}{\cos^2 t}\right]\,dt \\ =& [\tan^2 t + \sin t]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}+1.\end{aligned}$$

Dato che F è una primitiva di ω, allo stesso risultato si può arrivare calcolando

$$F(P) - F(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1.$$