ANALISI MATEMATICA II (Ing. Gestionale) COMPITO A
I APPELLO 19.01.2015 A.A.2014/15

---

1) Data la funzione $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x,y) := \cos y\ (x^2-4)$,

a) determinarne l'insieme di definizione $E \subset \mathbb{R}^2$;

b) determinare i punti di stazionarietà nell'insieme $E \subset \mathbb{R}^2$;

c) classificare i punti di stazionarietà ottenuti e determinare $f(E) \subset \mathbb{R}$.

d) Dato il compatto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -\pi \le x \le \pi, -\pi \le y \le \pi\}$, determinare $f(D) \subset \mathbb{R}$.

e) Riconoscere che $f(D) = [m, M]$ dove, rispettivamente, m ed M indicano il minimo ed il massimo valore assunto da f in D.

Soluzione

a) $E = \mathbb{R}^2$;

b) i punti di stazionarietà, individuati da $\nabla f = \mathbf{0}$ dove $\nabla f = (2x\cos y, -(x^2-4)\sin y)$ sono:

$$P_k \equiv (0, k\pi)\ , Q_k^{\pm} \equiv \left(\pm 2, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}\ ,$$

c) Classificazione dei punti di stazionarietà: $H(x,y) = -2(x^2-4)(\cos y)^2 - 4x^2(\sin y)^2$ quindi

- $P_{2k} \equiv (0, 2k\pi)$ punti di *minimo relativo proprio*,
- $P_{2k+1} \equiv (0, (2k+1)\pi)$ punti di *massimo relativo proprio*,
- tutti i punti $Q_k^{\pm} \equiv (\pm 2, \frac{\pi}{2} + k\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$, sono punti di flesso.

Poichè, per esempio, i punti $(k, 2k\pi) \in E, \forall k \in \mathbb{N}$, e $\lim_{k\to\infty} f(k, 2k\pi) = \lim_{k\to\infty} k^2 - 4 = +\infty$ mentre punti $(k, (2k+1)\pi) \in E, \forall k \in \mathbb{N}$, e $\lim_{k\to\infty} f(k, (2k+1)\pi) = \lim_{k\to\infty} -(k^2-4) = -\infty$ si deduce che $f(E) = (-\infty, +\infty)$.

d) I punti $P_0 \equiv (0,0)$ e $Q_k^{\pm} \equiv (\pm 2, \frac{\pi}{2} + k\pi), k = 0, -1$ sono punti interni a D: il primo è un punto di minimo relativo proprio $f(0,0) = -4$. Gli altri sono punti di flesso in cui f si annulla. I punti $P_{\pm 1} \equiv (0, \pm\pi) \in \partial D$: sappiamo già che $P_{\pm 1}$ sono punti di massimo relativo proprio e $f(0, \pm\pi) = 4$. Determinazione valori estremali di f su ∂D: $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ dove

$$\gamma_m : x = t, y = \pm\pi, \quad m = 1,3, \quad \gamma_m : x = \pm\pi, y = t, \quad m = 2,4$$

$F_m(t) = -(t^2-4), m = 1,3$ e $F_m(t) = (\pi^2-4)\cos t,\ m = 2,4$ quindi, troviamo i punti di massimo $(\pm\pi, 0)$, con $f(\pm\pi, 0) = \pi^2 - 4$ e ritroviamo anche i punti $(0, \pm\pi)$ e $f(0, \pm\pi) = 4$. Nei 4 vertici $(\pm\pi, \pm\pi)$ si ha $f(\pm\pi, \pm\pi) = -(\pi^2-4)$ Quindi $M = \pi^2 - 4, m = -(\pi^2-4)$.

e) $f \in C^0(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f \in C^0(D)$ dove D è compatto, quindi $f(D) = [m, M]$.

---

2) Data l'equazione differenziale:

$$(x+1)^2 y'' - 4(x+1)y' = 10\ , \quad x \in I \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

determinare

a) l'intervallo $I \subset \mathbb{R}$;

b) l'integrale generale di (1)

c) eventuali soluzioni che verificano la condizione $y(2) = 1$ e tali che $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.

Soluzione (Equazione di Eulero)

a) l'intervallo $I = (-1, +\infty) \subset \mathbb{R}$;

b) l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a (3) è

$$y(x) = c_1 + c_2(x+1)^5\ , \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

c) una soluzione dell'equazione non omogenea (3) è $y(x) = -2\log(x+1)$ e, quindi, l'integrale generale dell'equazione non omogenea (3) è:

$$y(x) = c_1 + c_2(x+1)^5 - 2\log(x+1)\ , \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

La condizione $y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$;

Derivando (2) si ricava $y'(x) = 5c_2(x+1)^4 - \dfrac{2}{x+1}$ quindi $c_2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$ la soluzione richiesta è $y(x) = 1 - 2\log(x+1)$.

---

3) Data la funzione di variabile reale

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \tag{3}$$

determinare:

a) l'insieme di definizione $E \subset \mathbb{R}$;

b) lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$, precisandone "a priori" la regione di convergenza B;

c) indicarne, poi, un sottoinsieme $A \subset B$ nel quale la serie trovata convcerge totalmente. Dimostrare la convergenza totale in A.

d) lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $\tilde{x}_0 = 2$, precisandone "a priori" la regione di convergenza, della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$.

e) scrivere lo sviluppo al punto b) nel caso del prolungamento di f nel campo complesso $\mathbb{C}$, i.e. sostituendo, in (3), $z \in E \subset \mathbb{C}$ a $x \in E \subset \mathbb{R}$.

Soluzione

a) $E = \mathbb{R}$;

b) la funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ è definita in $E = \mathbb{R}$ lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ ha raggio di convergenza $r = 1$; infatti, si riconosce che (1) coincide con la somma della serie geometrica di *ragione* $-x^2$ moltiplicata per x^2, cioè si ottiene

$$\frac{x^2}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2(k+1)}, \quad |x| < 1$$

c) la serie converge totalmente in $A \subset B$ definito da $A := \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq p\}$, scelto comunque $0 < p < 1$. Dimostrazione della convergenza totale in A.

1. $\forall x \in A,\ \forall k \in \mathbb{N} \implies |x^{2(k+1)}| \leq p^{2(k+1)} \leq p^k$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p^k$ converge (serie geometrica di ragione $0 < p < 1$).

d) la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ è definita in $E = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$ lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $\tilde{x}_0 = 2$ ha raggio di convergenza $r = 5$; infatti, $|\tilde{x}_0 - (-3)| = 5$ si riconosce che (1) coincide con la somma della serie geometrica di *ragione* $-x^2$ moltiplicata per x^2, cioè si ottiene

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{5+x-2} = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1-(\frac{x-2}{5})}\right] = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x-2}{5}\right)^k, \quad |x-2| < 5$$

e) scrivere lo sviluppo al punto b) nel caso in cui si considera il prolungamento di f nel campo complesso $\mathbb{C}$, i.e., in (1), si sostituisce $z \in E = \mathbb{C} \setminus\{\pm i\} \subset \mathbb{C}$ a $x \in E \subset \mathbb{R}$.Si noti che, $z_0 = 0$, e $r = |z_0 - i| = |z_0 - (-i)| = 1$, cioé la distanza del punto z_0 dai punti nei quali la funzione f non è definita. Si ottiene

$$\frac{z^2}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2(k+1)}, \quad |z| < 1 \tag{4}$$

la regione di convergenza, in $\mathbb{C}$ è un cerchio aperto di raggio $r = 1$ e centro nel punto $\tilde{z}_0 = 0$.