ANALISI MATEMATICA II (Ing. Gestionale) COMPITO B
I APPELLO 19.01.2015 A.A.2014/15

---

1) Data la funzione $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) := \cos x\ (y^2 - 4)$, determinare

- **a)** insieme di definizione $E \subset \mathbb{R}^2$
- **b)** i punti di stazionarietà nell'insieme $E \subset \mathbb{R}^2$
- **c)** Classificare i punti di stazionarietà ottenuti e determinare $f(E) \subset \mathbb{R}$
- **d)** Dato il compatto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi\}$, determinare $f(D) \subset \mathbb{R}$.
- **e)** Riconoscere che $f(D) = [m, M]$ dove, rispettivamente, m ed M indicano il minimo ed il massimo valore assunto da f in D.

Soluzione

- **a)** $E = \mathbb{R}^2$;
- **b)** i punti di stazionarietà, individuati da $\nabla f = \mathbf{0}$ dove $\nabla f = (-(y^2 - 4)\sin x, 2y \cos x)$ sono:

$$P_k \equiv (k\pi, 0)\ , Q_k^{\pm} \equiv \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pm 2\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}\ ,$$

- **c)** Classificazione dei punti di stazionarietà: $H(x, y) = -2(y^2 - 4)(\cos x)^2 - 4y^2(\sin x)^2$ quindi
  - $P_{2k} \equiv (2k\pi, 0)$ punti di *minimo relativo proprio*,
  - $P_{2k+1} \equiv ((2k + 1)\pi, 0)$ punti di *massimo relativo proprio*,
  - tutti i punti $Q_k^{\pm} \equiv (\frac{\pi}{2} + k\pi, \pm 2), \forall k \in \mathbb{Z}$, sono punti di flesso.

  Poichè, per esempio, i punti $(2k\pi, k) \in E, \forall k \in \mathbb{N}$, e $\lim_{k\to\infty} f(2k\pi, k) = \lim_{k\to\infty} k^2 - 4 = +\infty$ mentre punti $((2k + 1)\pi, k) \in E, \forall k \in \mathbb{N}$, e $\lim_{k\to\infty} f(2k\pi, k) = \lim_{k\to\infty} -(k^2 - 4) = -\infty$ si deduce che $f(E) = (-\infty, +\infty)$
- **d)** I punti $P_0 \equiv (0, 0)$ e $Q_k^{\pm} \equiv (\frac{\pi}{2} + k\pi, \pm 2), k = 0, -1$ sono punti interni a D: il primo è un punto di minimo relativo proprio $f(0, 0) = -4$. Gli altri sono punti di flesso. I punti $P_{\pm 1} \equiv (\pm\pi, 0) \in \partial D$: sappiamo già che $P_{\pm 1}$ sono punti di massimo relativo proprio e $f(\pm\pi, 0) = 4$. Determinazione valori estremali di f su ∂D: $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ dove

$$\gamma_m : x = t, y = \pm\pi, \quad m = 1, 3, \quad \gamma_m : x = \pm\pi, y = t, \quad m = 2, 4$$

  $F_m(t) = (\pi^2 - 4)\cos t, l = 1, 3$ e $F_m(t) = -(t^2 - 4),\ m = 2, 4$ quindi, ritroviamo i punti di massimo $(\pm\pi, 0)$ ed anche i punti $(0, \pm\pi)$ e $f(0, \pm\pi) = \pi^2 - 4$. Nei 4 vertici $(\pm\pi, \pm\pi)$ si ha $f(\pm\pi, \pm\pi) = -(\pi^2 - 4)$ Quindi $M = \pi^2 - 4, m = -(\pi^2 - 4)$.
- **e)** $f \in C^0(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f \in C^0(D)$ dove D è compatto, quindi $f(D) = [m, M]$.

---

2) Data l'equazione differenziale:

$$(x - 1)^2 y'' - 4(x - 1)y' + 4y = (x - 1)\ , \quad x \in I \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

determinare:

- **a)** l'intervallo $I \subset \mathbb{R}$;
- **b)** l'integrale generale di (1)
- **c)** eventuali soluzioni derl problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(2) &= 1 \\ y'(2) &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

Soluzione (Equazione di Eulero)

- **a)** l'intervallo $I = (1, +\infty) \subset \mathbb{R}$;
- **b)** l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a (1) è

$$y(x) = c_1(x - 1) + c_2(x - 1)^4\ , \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

c) una soluzione dell'equazione non omogenea (1) è

$$y(x) = -\frac{1}{3}(x-1)\log(x-1)$$

e la soluzione (UNICA) del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{11}{9}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^4 - \frac{1}{3}(x-1)\log(x-1) \tag{3}$$

---

3) Data la funzione di variabile reale

$$f(x) = \frac{4x^2}{1-x^2} \tag{4}$$

determinare:

a) l'insieme di definizione $E \subset \mathbb{R}$;

b) lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$, precisandone "a priori" la regione di convergenza B;

c) indicarne, poi, un sottoinsieme $A \subset B$ nel quale la serie trovata converge totalmente. Dimostrare la convergenza totale in A.

d) lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $\tilde{x}_0 = 2$, precisandone "a priori" la regione di convergenza.

e) scrivere lo sviluppo al punto b) nel caso in cui si considera il prolungamento di f nel campo complesso $\mathbb{C}$, i.e., in (4), si sostituisce $z \in E \subset \mathbb{C}$ a $x \in E \subset \mathbb{R}$.

Soluzione

a) $E = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$;

b) lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ ha raggio di convergenza $r = 1$, dove

$$r = \min\{|x_0 - 1|, |x_0 - (-1)|\},$$

la regione di convergenza B è $B := \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$; ricordando la serie geometrica, si riconosce che (4) coincide con la somma della serie geometrica di *ragione* x^2 moltiplicata per x^2, cioè si ottiene

$$\frac{4x^2}{1-x^2} = 4\sum_{k=0}^{\infty} x^{2(k+1)}, \quad |x| < 1$$

c) la serie converge totalmente in $A \subset B$ definito da $A := \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq p\}$, scelto comunque $0 < p < 1$. Dimostrazione della convergenza totale in A.

1. $\forall x \in A,\ \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow |x^{2(k+1)}| \leq p^{2(k+1)} \leq p^k$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p^k$ converge (serie geometrica di ragione $0 < p < 1$).

d) lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $\tilde{x}_0 = 2$, ha raggio di convergenza $r = \min\{|\tilde{x}_0 - 1|, |\tilde{x}_0 - (-1)|\} = \min\{1, 3\} = 1 \Longrightarrow r = 1$, quindi la regione di convergenza è $B := \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 1\}$. Poichè:

$$\frac{1}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right), \ \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1+(x-2)}, \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-(-\frac{x-2}{3})}, \ x^2 = (x-2)^2 + 4(x-2) + 4$$

si ottiene

$$\frac{4x^2}{1-x^2} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[1+3^{-k}](x-2)^k\{(x-2)^2 + 4(x-2) + 4\}, \quad |x-2| < 1$$

e) scrivere lo sviluppo al punto b) nel caso in cui si considera il prolungamento di f nel campo complesso $\mathbb{C}$, i.e., in (4), si sostituisce $z \in E = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\} \subset \mathbb{C}$ a $x \in E \subset \mathbb{R}$. Si ottiene

$$\frac{4z^2}{1-z^2} = 4\sum_{k=0}^{\infty} z^{2(k+1)}, \quad |z| < 1 \tag{5}$$

la regione di convergenza, in $\mathbb{C}$ è un cerchio aperto di raggio $r = 1$ e centro nel punto $\tilde{x}_0 = 0$.