FISICA MATEMATICA (Ingegneria Civile)
APPELLO STRAORDINARIO (19.10.2018) A.A.2017/18

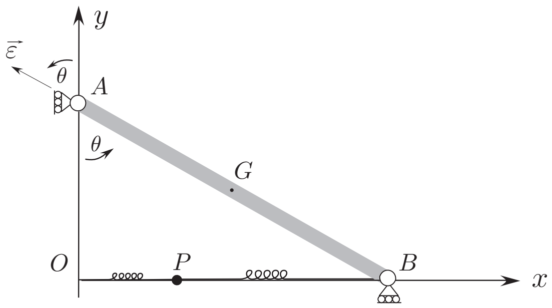
Una sbarra AB rettilinea rigida, omogenea pesante, di massa $\mathfrak{M}$ e lunghezza ℓ, ha gli estremi vincolati a scorrere senza attrito lungo due guide rettilinee x ed y solidali a terra ed appartenenti a un piano verticale (x, y); l'asse y è verticale fisso e orientato verso l'alto.

Le sollecitazioni vincolari che agiscono sui due estremi della sbarra sono equivalenti a due singole forze: $(\vec{R}_A, \vec{R}_B)$ applicate rispettivamente in A ed in B.

Lungo la guida rettilinea x è anche vincolato a scorrere senza attrito un elemento pesante P di massa m sul quale agisce una forza elastica $-k_O\,\overrightarrow{OP}$ di centro l'origine O del riferimento e costante elastica k_O.

Inoltre, l'estremo B della sbarra e l'elemento (non si urtano e) si scambiano una coppia elastica $(B,\ k_B\,\overrightarrow{BP},\ P, k_B\,\overrightarrow{PB})$.

Sia G il baricentro della sbarra, sia $\vec{\varepsilon}$ il versore di $\overrightarrow{BA}$, sia θ l'anomalia che $\vec{\varepsilon}$ forma con il versore $\vec{e}_2$, contata positivamente in senso antiorario rispetto al versore $\vec{e}_3$, e si scelgano come coordinate lagrangiane l'ascissa x dell'elemento P lungo la retta x e l'anomalia θ.



1) Scrivere le espressioni lagrangiane delle energie cinetica e potenziale e usarle per scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema.

2) Introdotte le costanti α e β tali che $k_O = \alpha\, k_B$ e $\mathfrak{M}\, g = \beta\, k_B\, \ell$, dimostrare che esiste una sola posizione di equilibrio stabile se è $\beta = 2\alpha$.

3) (*facoltativo*) Determinare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare arbitrario dei parametri α e β.

4) Scrivere le equazioni cardinali della stereodinamica, e di Newton per l'elemento, e verificare le equazioni di Lagrange trovate al Punto precedente.

5) Specificare i valori delle $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ ed $\vec{R}_P$ in corrispondenza allo stato cinetico $(x = 0,\ \theta = \pi/2,\ \dot{x} = 0,\ \dot{\theta} = 0)$.

6) Ancora sotto l'ipotesi $\beta = 2\alpha$, e con $\mathfrak{M} = 3m$, determinare equazione variazionale e pulsazioni proprie (ν_1, ν_2) delle piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio stabile, e calcolare il valore della loro soluzione $(x(t), \theta(t))$ uscente dai dati: $(x_0 = 0,\ \theta_0 = \pi/2,\ \dot{x}_0 = 0,\ \dot{\theta}_0 = 0)$.

□

RISOLUZIONE

<u>*Punto 1)*</u> Sussistono le

$$\left(\vec{\varepsilon}\right)_e = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \left(\overrightarrow{OA}\right)_e = \ell \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \left(\overrightarrow{OB}\right)_e = \ell \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\overrightarrow{OG}\right)_e = \frac{\ell}{2} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

$\overrightarrow{OP} \ = \ x\,\vec{e}_1\ ,\quad$ e quindi $\quad \vec{v}_P \ = \ \dot{x}\,\vec{e}_1\ ,\qquad \vec{a}_P \ = \ \ddot{x}\,\vec{e}_1\ ,\quad$ e

$$\Big(\vec{v}_G\Big)_e \ = \ \frac{\ell}{2}\,\dot{\theta}\,\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\ ,\qquad \Big(\vec{a}_G\Big)_e \ = \ \frac{\ell}{2}\,\ddot{\theta}\,\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix} - \frac{\ell}{2}\,\dot{\theta}^2\,\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\ .$$

Ne seguono $\quad v_P^2 \ = \ \dot{x}^2 \quad$ e $\quad v_G^2 \ = \ \frac{1}{4}\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 \quad$ mediante le quali le

$$\mathcal{V} \ = \ \mathcal{V}^{peso} + \mathcal{V}^{elas}\ ,\qquad\qquad \mathcal{T} \ = \ \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\,v_G^2 + \mathcal{T}^G + \frac{1}{2}\,m v_P^2\ ,$$

si specializzano nelle

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} \ &= \ \mathfrak{M}\,g\,y_G + \frac{1}{2}\,k_O\,x^2 + \frac{1}{2}\,k_B\,(\ell\sin\theta - x)^2 + cost.\\
&= \ \mathfrak{M}\,g\,\frac{\ell}{2}\,\cos\theta + \frac{1}{2}\,(k_O + k_B)\,x^2 + \frac{1}{2}\,k_B\,\ell^2\sin^2\theta - k_B\,\ell\,x\,\sin\theta + cost.\\
\mathcal{T} \ &= \ \frac{1}{2}\,m\,v_P^2 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\,\frac{1}{4}\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\,\frac{1}{12}\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 \ = \ \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{6}\,\mathfrak{M}\,\ell^2\dot{\theta}^2\ .
\end{aligned}$$

Se ne ricavano le

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} \ &= \ (k_O + k_B)\,x - k_B\,\ell\,\sin\theta\\
\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\theta} \ &= \ -\mathfrak{M}\,g\,\frac{\ell}{2}\,\sin\theta + k_B\,\ell^2\sin\theta\,\cos\theta - k_B\,\ell\,x\,\cos\theta\\
\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial x} \ &= \ \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\theta} \ = \ 0\ ,\qquad \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{x}} \ = \ m\,\dot{x}\ ,\qquad \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{\theta}} \ = \ \frac{1}{3}\,\mathfrak{M}\,\ell^2\,\dot{\theta}
\end{aligned}$$

e da queste seguono le equazioni richieste:

$$\begin{cases}
m\,\ddot{x} \ = \ -(k_O + k_B)\,x + k_B\,\ell\,\sin\theta\\
\frac{1}{3}\,\mathfrak{M}\,\ell^2\,\ddot{\theta} \ = \mathfrak{M}\,g\,\frac{\ell}{2}\,\sin\theta - k_B\,\ell^2\sin\theta\,\cos\theta + k_B\,\ell\,x\,\cos\theta
\end{cases}\tag{5.0.34}$$

<u>*Punto 2)*</u> Le condizioni di equilibrio risultano

$$\begin{cases}
(k_O + k_B)\,x - k_B\,\ell\,\sin\theta \ = \ 0\\
-\mathfrak{M}\,g\,\frac{\ell}{2}\,\sin\theta + k_B\,\ell^2\sin\theta\,\cos\theta - k_B\,\ell\,x\,\cos\theta \ = \ 0
\end{cases}$$

da cui, e usando le posizioni $k_O = \alpha\,k_B$ e $\mathfrak{M}\,g = \beta\,k_B\,\ell$, si ricava $\quad x_e = \dfrac{1}{1+\alpha}\,\ell\,\sin\theta_e \quad$ tramite la quale la seconda fornisce

$$\left(-\frac{\mathfrak{M}\,g}{2k_B\ell} + \cos\theta - \frac{k_B}{k_O + k_B}\,\cos\theta\right)\,\sin\theta \ = \ 0\ ;$$

dunque esistono comunque le due posizioni: $\quad \mathcal{C}_1(x_1,\,\theta_1) = (0,\,0)\ ,\qquad \mathcal{C}_2(x_2,\,\theta_2) = (0,\,\pi)\ ,\quad$ inoltre vi possono essere, se esistono, due ulteriori configurazioni di equilibrio $\ \mathcal{C}_{3,4}(x_{3,4},\,\theta_{3,4})\ $ tali che

$$\cos\theta_{3,4} \ = \ \frac{\mathfrak{M}\,g}{2\,k_B\,\ell}\,\left(\frac{k_O + k_B}{k_O}\right) \ = \ \beta\,\frac{1+\alpha}{2\,\alpha}\quad \text{se questo è minore di 1 ovvero:}\quad \beta\,(1+\alpha) \ \le \ 2\,\alpha\ .$$

Nel caso richiesto, in cui $\beta = 2\,\alpha$, il rapporto $\beta\,(1+\alpha)/2\,\alpha$ vale $1+\alpha$ che è certo maggiore di uno, e quindi le due ultime posizioni non esistono.

Per studiare la stabilità, si calcola la matrice Hessiana $\mathfrak{h} \equiv \partial^2\mathcal{V}$ a partire dalle

$$\begin{aligned}
&k_O \ = \alpha\,k_B\ ,\qquad \mathfrak{M}\,g \ = \ \beta\,k_B\,\ell\ ,\qquad \text{e dalle}\\
&\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x^2} \ = \ (k_O + k_B)\ ,\qquad \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x\,\partial\theta} \ = \ -k_B\,\ell\,\cos\theta\\
&\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial\theta^2} \ = \ -\mathfrak{M}\,g\,\frac{\ell}{2}\,\cos\theta - k_B\,\ell^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + k_B\,\ell\,x\,\sin\theta \ =: \ k_B\,\ell^2\,b\ ;
\end{aligned}$$

risulta

$$\mathfrak{b} \; = \; \begin{pmatrix} k_B\,(1+\alpha) & -k_B\,\ell\,\cos\theta \\ -k_B\,\ell\,\cos\theta & k_B\,\ell^2\; b \end{pmatrix} \qquad \text{con } b \;:=\; \left(-\frac{\beta}{2}\;\cos\theta - (\sin^2\theta - \cos^2\theta) + \frac{1}{1+\alpha}\;\sin^2\theta \right)\;.$$

Per le configurazioni trovate si calcolano

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\beta}{2} + 1\;, \qquad\qquad b_2 \;=\; \frac{\beta}{2} + 1 \\ b_{3,4} &= -\beta^2\,\frac{1+\alpha}{4\alpha} - \frac{4\alpha^2 - 2\beta^2(1+\alpha)^2}{4\alpha^2} + \frac{4\alpha^2 - \beta^2(1+\alpha)^2}{4\alpha^2(1+\alpha)} \\ &= -\frac{\alpha\beta^2(1+\alpha)^2}{4\alpha^2(1+\alpha)} - \frac{4\alpha^2(1+\alpha) - 2\beta^2(1+\alpha)^3}{4\alpha^2(1+\alpha)} + \frac{4\alpha^2 - \beta^2(1+\alpha)^2}{4\alpha^2(1+\alpha)} \\ &= \frac{1}{4\alpha^2(1+\alpha)}\;\left(-4\alpha^3 + \beta^2(1+\alpha)^3\right)\;, \end{aligned}$$

e quindi le matrici $\mathfrak{b}$ hanno tutte primo elemento positivo, e determinanti

$$\begin{aligned} \frac{Det(\mathfrak{b}_1)}{k_B^2\ell^2} &= b_1(1+\alpha) - 1 \;=\; -\frac{\beta}{2}\,(1+\alpha) + \alpha \\ \frac{Det(\mathfrak{b}_2)}{k_B^2\ell^2} &= b_2(1+\alpha) - 1 \;=\; +\frac{\beta}{2}\,(1+\alpha) + \alpha \\ \frac{Det(\mathfrak{b}_{3,4})}{k_B^2\ell^2} &= b_{3,4}(1+\alpha) - \beta^2\,\frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha^2} \\ &= \frac{1}{4\alpha^2}\;\left(-4\alpha^3 + \beta^2(1+\alpha)^3 - \beta^2(1+\alpha)^2\right) \;=\; \frac{\beta^2(1+\alpha)^2}{4\,\alpha} - \alpha\;. \end{aligned}$$

Se ne conclude che la $\mathcal{C}_2$ esiste sempre ed è stabile; la $\mathcal{C}_1$ esiste sempre ed è stabile solo se $\beta\,(1+\alpha) < 2\,\alpha$; le due $\mathcal{C}_{3,4}$ esistano solo se $\beta\,(1+\alpha) \le 2\,\alpha$ ma non sono mai stabili.

<u>*Punto 4)*</u> Scrivendo la seconda equazione cardinale rispetto al polo A si deduce che $R_{B,z} = 0$, e analogamente per $R_{A,z}$ se si usa il polo B. Pertanto le equazioni cardinali forniscono

$$\begin{cases} \mathfrak{M}\;\vec{a}_G \;=\; \mathfrak{M}\;\vec{g} + k_B\overrightarrow{BP} + \vec{R}_A + \vec{R}_B \\ m\,\vec{a}_P \;=\; m\,\vec{g} + k_O\overrightarrow{PO} + k_B\overrightarrow{PB} + \vec{R}_P \\ \dot{\vec{K}}_G \;=\; \overrightarrow{GA}\times\vec{R}_A + \overrightarrow{GB}\times\left(k_B\overrightarrow{BP} + \vec{R}_B\right)\;, \qquad \text{ovvero} \\ \dfrac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{12}\;\ddot\theta \;=\; \begin{vmatrix} -x_G & y_A - y_G \\ R_{A,x} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_B - x_G & -y_G \\ k_B(x_P - x_B) & R_{B,y} \end{vmatrix} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\,\ddot{x}_G &= \mathfrak{M}\;\left(\frac{\ell}{2}\;\ddot\theta\;\cos\theta - \frac{\ell}{2}\;\dot\theta^2\;\sin\theta\right) \;=\; R_{A,x} + k_B\;(x_P - x_B) \\ \mathfrak{M}\,\ddot{y}_G &= \mathfrak{M}\;\left(-\frac{\ell}{2}\;\ddot\theta\;\sin\theta - \frac{\ell}{2}\;\dot\theta^2\;\cos\theta\right) \;=\; R_{B,y} - \mathfrak{M}\,g \\ m\ddot{x}_P &= -k_O\,x_P - k_B\;(x_P - x_B)\;, \\ m\ddot{y}_P &= 0 \;=\; R_{P,y} - m\,g\;, \\ \frac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{12}\;\ddot\theta &= -R_{A,x}(y_A - y_G) + R_{B,y}(x_B - x_G) + k_B y_G(x_P - x_B) \end{aligned} \tag{5.0.35}$$

e quindi le due equazioni pure sono:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} \;&=\; -(k_O + k_B)\,x + k_B x_B\;, \\ \frac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{12}\;\ddot\theta + \mathfrak{M}\,\ddot{x}_G\;(y_A - y_G) - \mathfrak{M}\,\ddot{y}_G\;(x_B - x_G) \;&=\; \\ =\; k_B\;(x_P - x_B)\;(y_A - y_G) + \mathfrak{M}\,g\;(x_B - x_G) + k_B y_G(x_P - x_B)\;, \end{aligned}$$

ovvero, usando le $x_P = x$, $x_B = \ell\ \sin\theta$, $y_A = \ell\ \cos\theta$, $x_G = \frac{\ell}{2}\ \sin\theta$, $y_G = \frac{\ell}{2}\ \cos\theta$, e quindi le $(x_P - x_B) = x - \ell\ \sin\theta$, $(x_B - x_G) = \frac{\ell}{2}\ \sin\theta$, $(y_A - y_G) = \frac{\ell}{2}\ \cos\theta$, si trovano le

$$m\ddot{x} \ = \ -(k_O + k_B)\, x + k_B\, \ell\ \sin\theta\ ,$$

$$\frac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{12}\ \ddot\theta + \mathfrak{M}\left(\frac{\ell}{2}\ \ddot\theta\ \cos\theta - \frac{\ell}{2}\ \dot\theta^2\ \sin\theta\right)\ \frac{\ell}{2}\ \cos\theta - \mathfrak{M}\left(-\frac{\ell}{2}\ \ddot\theta\ \sin\theta - \frac{\ell}{2}\ \dot\theta^2\ \cos\theta\right)\ \frac{\ell}{2}\ \sin\theta \ =$$

$$= \ k_B\ \ (x - \ell\ \sin\theta)\ \ \frac{\ell}{2}\ \cos\theta + \mathfrak{M}\, g\ \frac{\ell}{2}\ \sin\theta + k_B\ \frac{\ell}{2}\ \cos\theta\ (x - \ell\ \sin\theta)\ \ ,$$

che diviene $$\frac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{3}\ \ddot\theta \ = \ k_B\ \ (x - \ell\ \sin\theta)\ \ \ell\ \cos\theta + \mathfrak{M}\, g\ \frac{\ell}{2}\ \sin\theta\ ,$$

che coincidono con le equazioni di Lagrange (5.0.34) trovate al Punto 1).

Punto 5) I dati $(x = 0,\ \theta = \pi/2,\ \dot x = 0,\ \dot\theta = 0)$ e le equazioni (5.0.34) forniscono in loro corrispondenza $m\ddot x = k_B\ell$, $\frac{1}{3}\ \mathfrak{M}\,\ell^2\ddot\theta = \frac{1}{2}\ \mathfrak{M}\, g\,\ell$, $\ddot x_G = 0$, $\mathfrak{M}\,\ddot y_G = -\frac{1}{2}\ \mathfrak{M}\,\ell^2\ddot\theta = -\frac{3}{4}\ \mathfrak{M}\ g$, e le (5.0.35) danno

$$\begin{aligned}
R_{A,x} \ &= \ \mathfrak{M}\,\ddot x_G - k_B\ (x_P - x_B) \ = \ -k_B\, (x - \ell) \ = \ k_B\ \ell \\
R_{B,y} \ &= \ \mathfrak{M}\,\ddot y_G + \mathfrak{M}\ g \ = \ \mathfrak{M}\ g\left(1 - \frac{3}{4}\right) \ = \ \frac{1}{4}\ \mathfrak{M}\, g \\
R_{P,y} \ &= \ m\, g\ .
\end{aligned}$$

Punto 6) Ancora con $\beta = 2\alpha$ e per la configurazione $\mathcal{C}_2 \equiv (x_e,\ \theta_e) = (0,\ \pi)$, si calcolano le

$$\mathfrak{b}_2 \ = \ \begin{pmatrix} (k_O + k_B) & -k_B\,\ell\ \cos\theta_e \\ -k_B\,\ell\ \cos\theta_e & k_B\,\ell^2\ b_2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} k_B\,(1+\alpha) & k_B\,\ell \\ k_B\,\ell & k_B\,\ell^2\ \left(\frac{\beta}{2} + 1\right) \end{pmatrix}$$

ed $\mathfrak{a}_2 \ = \ \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \mathfrak{M}\,\ell^2/3 \end{pmatrix}$. Dunque la $\begin{vmatrix} k_B\,(1+\alpha) - \lambda\, m & k_B\,\ell \\ k_B\,\ell & k_B\,\ell^2\ \left(\frac{\beta}{2}+1\right) - \lambda\,\frac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{3} \end{vmatrix} \ = \ 0$ che fornisce

$$k_B^2\,\ell^2\ (1+\alpha)\left(1 + \frac{\beta}{2}\right) + \frac{\mathfrak{M}\, m\,\ell^2}{3}\ \lambda^2 - \left(\frac{\mathfrak{M}\ \ell^2}{3}\ k_B(1+\alpha) + m\, k_B\ell^2\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)\right)\ \lambda - k_B^2\,\ell^2 \ = \ 0$$

ovvero, essendo $\beta = 2\alpha$, $$\frac{\mathfrak{M}\, m}{3k_B^2}\ \lambda^2 - \frac{(1+\alpha)}{k_B}\ \left(\frac{\mathfrak{M}}{3} + m\right)\ \lambda + \left((1+\alpha)^2 - 1\right) \ = \ 0$$

da cui, per la $\mathfrak{M} = 3m$, segue $$\frac{\lambda^2}{(k_B/m)^2} - 2(1+\alpha)\ \frac{\lambda}{(k_B/m)} + \left((1+\alpha)^2 - 1\right) \ = \ 0\ .$$

Risulta $\dfrac{\lambda}{(k_B/m)} \ = (1+\alpha) \pm \sqrt{(1+\alpha)^2 - (1+\alpha)^2 + 1}$ e dunque le due pulsazioni proprie sono $\lambda_1 \ = \ \dfrac{k_B}{m}\ \alpha \ = \ \dfrac{3\,g\,\alpha}{\beta\,\ell} \ = \ \dfrac{3\,g}{2\,\ell}$, e $\lambda_2 = \dfrac{k_B}{m}\ (2+\alpha) \ = \ \dfrac{3\,g}{2\,\ell}\ \dfrac{(2+\alpha)}{\alpha}$. Ne seguono gli autovettori:

$$\begin{aligned}
k_B(1+\alpha)\varepsilon_{1,x} + k_B\ell\varepsilon_{1,y} \ &= \ m\,\lambda_1\ \varepsilon_{1,x} \ = \ k_B\,\alpha\ \varepsilon_{1,x} \qquad \text{che fornisce} \quad (\varepsilon_{1,x},\ \varepsilon_{1,y}) = (-1,\ 1/\ell)\ , \\
k_B(1+\alpha)\varepsilon_{2,x} + k_B\ell\varepsilon_{2,y} \ &= \ m\,\lambda_2\ \varepsilon_{2,x} \ = \ k_B\,(2+\alpha)\ \varepsilon_{2,x} \qquad \text{che fornisce} \quad (\varepsilon_{2,x},\ \varepsilon_{2,y}) = (+1,\ 1/\ell)\ .
\end{aligned}$$

Mediante le matrici $\boldsymbol{p} \ = \ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/\ell & 1/\ell \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}^{-1} \ = \ \dfrac{1}{2}\ \begin{pmatrix} -1 & \ell \\ 1 & \ell \end{pmatrix}$ da cui la $\begin{pmatrix} \rho_1^0 \\ \rho_2^0 \end{pmatrix} \ = \ \boldsymbol{p}^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 - \pi \end{pmatrix} \ = \ \boldsymbol{p}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}$ insieme con la $\begin{pmatrix} \dot\rho_1^0 \\ \dot\rho_2^0 \end{pmatrix} \ = \ \boldsymbol{p}^{-1}\begin{pmatrix} \dot x_0 \\ \dot\theta_0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, si trovano le soluzioni richieste per $(x_0 = 0,\ \theta_0 = \pi/2,\ \dot x_0 = 0,\ \dot\theta_0 = 0)$; esse sono:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) - \theta_e \end{pmatrix} \ &= \ \boldsymbol{p}\ \begin{pmatrix} \cos\nu_1 t & 0 \\ 0 & \cos\nu_2 t \end{pmatrix} \boldsymbol{p}^{-1}\ \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 - \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \ \frac{1}{2}\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/\ell & 1/\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos\nu_1 t & \ell\cos\nu_1 t) \\ \cos\nu_2 t & \ell\cos\nu_2 t \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi/2 \end{pmatrix} \\
&= \ \frac{1}{2}\ \begin{pmatrix} \cos\nu_2 t + \cos\nu_1 t & \ell\,(\cos\nu_2 t - \cos\nu_1 t) \\ \frac{1}{\ell}\ (\cos\nu_2 t - \cos\nu_1 t) & (\cos\nu_2 t + \cos\nu_1 t) \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{cases} x(t) \;=\; -\dfrac{\pi}{4}\;\ell\;\left(\cos\nu_2 t - \cos\nu_1 t\right) \\[2mm] \theta(t) \;=\; \pi - \dfrac{\pi}{4}\;\left(\cos\nu_2 t + \cos\nu_1 t\right)\ . \end{cases}$$

Per la matrice dei modi normali relativa alla teoria, occorre normalizzare gli autovettori $\vec{\varepsilon}_{1,2}$ secondo il prodotto scalare dell'energia cinetica; ciò significa calcolare i vettori $\widetilde{\vec{\varepsilon}}_j = k_{(j)}\vec{\varepsilon}_j$ e imporre che le costanti k_j siano tali che $\widetilde{\vec{\varepsilon}}_j \cdot \boldsymbol{\mathfrak{a}}\ \widetilde{\vec{\varepsilon}}_j = 1$ per $j = 1, 2$.

I due vettori trovati sopra sono: $\vec{\varepsilon}_1 = (-1,\ 1/\ell)^T$, $\vec{\varepsilon}_2 = (+1,\ 1/\ell)^T$, e la matrice di massa è $\boldsymbol{\mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{3}\end{pmatrix}$; ne segue che sono $\boldsymbol{\mathfrak{a}}\ \vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} -m \\ \frac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{3}\end{pmatrix}$ insieme con $\boldsymbol{\mathfrak{a}}\ \vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} m \\ \frac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{3}\end{pmatrix}$, e dunque che

$$\left(-1\ ,\ \frac{1}{\ell}\right)\ \begin{pmatrix} -m \\ \frac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{3}\end{pmatrix} = \ m + \frac{\mathfrak{M}}{3}\ =\ 2m \qquad \left(+1\ ,\ \frac{1}{\ell}\right)\ \begin{pmatrix} +m \\ \frac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{3}\end{pmatrix} = \ m + \frac{\mathfrak{M}}{3}\ =\ 2m\ .$$

Pertanto, ponendo $\widetilde{\vec{\varepsilon}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\ \vec{\varepsilon}_1$ e $\widetilde{\vec{\varepsilon}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\ \vec{\varepsilon}_2$ si ha che per entrambi $j = 1, 2$ risultano

$$\widetilde{\vec{\varepsilon}}_j \cdot \boldsymbol{\mathfrak{a}}\ \widetilde{\vec{\varepsilon}}_j = \frac{1}{2m}\ \widetilde{\vec{\varepsilon}}_j \cdot \boldsymbol{\mathfrak{a}}\ \widetilde{\vec{\varepsilon}}_j = \frac{1}{2m}\ 2m\ =\ 1\ .$$

È d'altra parte facile constatare che $\vec{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\mathfrak{a}}\ \vec{\varepsilon}_j\ =\ -m + \frac{\mathfrak{M}\,\ell^2}{3}\ =\ 0$ se $i \neq j$, e che allora è anche $\widetilde{\vec{\varepsilon}}_i \cdot \boldsymbol{\mathfrak{a}}\ \widetilde{\vec{\varepsilon}}_j\ =\ 0$, che pertanto risulta $\widetilde{\vec{\varepsilon}}_i \cdot \boldsymbol{\mathfrak{a}}\ \widetilde{\vec{\varepsilon}}_j\ =\ \delta_{i,j}$.