

## FISICA MATEMATICA per Ingegneria Civile Diario delle lezioni A.A. 2017-2018<sup>1</sup>

Questo *diario delle lezioni*, che contiene gli argomenti trattati a lezione nel Corso di Fisica Matematica per Ingegneria Civile (Prof. S. Carillo, A.A. 2017-2018), ha per obiettivo quello di aiutare lo studente a preparare l'esame in parallelo con la frequenza delle lezioni, facilitandogli lo studio. Preghiamo gli studenti di segnalare eventuali errori. I risultati si intendono con dimostrazione, tranne ove diversamente indicato (s.d.). Tutte le definizioni e i teoremi sono accompagnati da esempi ed esercizi, di cui ne sono riportati qui solo alcuni.

Questo documento è curato da Sandra Carillo, docente del corso e da Alessandro Ciallella, "tutor" del corso.

Il testo di riferimento per la teoria è [1]. Lo studente può prepararsi per sostenere l'esame su qualunque testo di suo gradimento, come, per esempio [3, 4]. Nelle lezioni e nella stesura del programma si fa riferimento [1].

Per quanto riguarda gli esercizi, si consiglia di iniziare dagli esempi svolti sul testo di lezioni: leggere il testo e risolvere il problema proposto sulla base della teoria, poi, confrontare lo svolgimento personale con quello sul testo stesso. Gli esercizi di ricapitolazione rappresentano possibili testi di esame. Altri esercizi, anche di esame, si trovano in [2].

Ulteriori esercizi si trovano nelle pag web indicate nella pagina del corso (esercitazioni di preparazione assegnate durante il semestre) e sono disponibili sul sito del corso sulla piattaforma *elearning*. Gli esercizi assegnati devono essere svolti dallo studente personalmente e vanno consegnati, di norma, il venerdì successivo a quello nel quale sono assegnati. Le pagine del corso sono:

<http://www.sbai.uniroma1.it/carillo-sandra/fisica-matematica/2017-2018>

e

<https://elearning2.uniroma1.it/course/view.php?id=5262>

Si rimanda lo studente a consultare tali siti; il primo dedicato a tutte le informazioni di carattere organizzativo ed informativo, il secondo al materiale distribuito in aula ed ulteriori informazioni di interesse per chi frequenta il corso.

### Mercoledì 27 settembre 2017 (3 ore - S. Carillo)

- Introduzione al corso: elenco principali argomenti trattati. sc
- Notazione e finalità del corso.
- Significato di modello matematico.
- Richiami e complementi di algebra vettoriale: prodotto scalare e prodotto vettore, prodotto misto e loro proprietà.
- Spazi di riferimento e terne di proiezione.
- Cambio di base con esempi.

### Giovedì 28 settembre 2017 (3 ore - S. Carillo)

- Prodotto vettore come moltiplicazione per una *opportuna* matrice antisimmetrica.
- Moto, equazione oraria e traiettoria.
- Definizione di (arco di) *curva regolare* e sue proprietà.
- Equazioni parametriche con esempi: retta tangente in un punto  $P \in \gamma$ ,  $\gamma$  arco di curva regolare.
- Terna intrinseca: definizione ed esempi.

<sup>1</sup>Nel seguito *studente* indica, naturalmente, *studente e/o studentessa* e, analogamente, al plurale.

**Venerdì 29 settembre 2017** (2 ore - S. Carillo)

- Curvatura e raggio di curvatura.
  - Equazioni parametriche di una circonferenza  $\mathcal{C}$  di centro  $C \in \mathbb{R}^2$ .
  - Calcolo dei versori  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$  in un generico punto della circonferenza  $\mathcal{C}$ .
  - Espressione intrinseca della velocità e dell'accelerazione.
- 

**Venerdì 29 settembre 2017** (2 ore - A. Ciallella)

Richiami ed esercizi dal libro di testo su:

- Individuazione dei coseni direttori di un vettore;
  - Teorema di Carnot;
  - Matrici di cambiamento di base;
- 

**Mercoledì 4 ottobre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Esercizio: date le curve parametriche della traiettoria (elica cilindrica es 1.4.6) determinare, in un punto assegnato, i versori della terna intrinseca ed il piano osculatore alla traiettoria stessa nel punto.
  - Vettori applicati. Coppia.
  - Equazioni parametriche con esempi: retta tangente in un punto  $P \in \gamma$ ,  $\gamma$  arco di curva
  - Condizione  $|\overrightarrow{P_1 P_2}| = \text{costante} \implies \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \vec{v}_2$
  - Proprietà cinematiche del moto  $s\ddot{s}$ .
  - Esempi e moti particolari.
  - Moti rettilinei.
  - Moti piani: introduzione.
- 

**Giovedì 5 ottobre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Formule di Frenet.
  - Moti centrali:  $\vec{k}_C(t) = \overrightarrow{CP}(t) \times \vec{a}(t) \equiv 0 \iff \overrightarrow{CP}(t) \times \vec{v}(t) = f(t)\vec{n}, \forall t$ , dove  $\vec{n}$  versore (costante) ortogonale al piano del moto.
    - Espressioni di velocità e accelerazione in coordinate polari nel piano, usando come terna di proiezione la terna  $x, y, z$  e i vettori  $\vec{u} := \overrightarrow{CP}/|\overrightarrow{CP}|$ ,  $\vec{\tau} \perp \vec{u}$  tali che  $\vec{u}, \vec{\tau}, \vec{n}$ , sia una terna ortonormale destra.
    - In un moto centrale la *Velocità aerolare* è costante.
  - Campo vettoriale elicoidale con esempi: unica forza, unica coppia, atto di moto rigido piano.
-

**Venerdì 6 ottobre 2017** (2 ore - S. Carillo)

- Dinamica dell'elemento: introduzione.
- Teorema di esistenza e unicità della soluzione per il problema di Cauchy

$$P: \begin{cases} m\vec{a} = \vec{f}^a(\vec{OP}, \vec{v}, t) \\ \vec{OP}(t_0) = \vec{OP}_0 \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0. \end{cases}$$

- Esempi:  $\vec{f}^a(\vec{OP}, \vec{v}, t) = m\vec{g}$ ;  $\vec{f}^a(\vec{OP}, \vec{v}, t) = -k\vec{OP}$ ;  $\vec{f}^a(\vec{OP}, \vec{v}, t) = \alpha \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ .
  - moto *quiete*.
  - Definizione di *posizione di equilibrio*. Determinazione delle posizioni di equilibrio in  $\mathbb{R}^3$  nel caso delle forze assegnate negli esempi considerati.
- 

**Venerdì 6 ottobre 2017** (2 ore - A. Ciallella)

- Esercizio 2.2.1 dalla seconda scheda di esercizi.
  - Esercizio sulle curve: calcolo di ascissa curvilinea e terna intrinseca per la cicloide.
- 

**Mercoledì 11 ottobre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Lavoro: definizione ed esempio di calcolo.
  - Forze conservative: definizione e proprietà.
  - Esempi: forza costante (qualunque direzione) e forza elastica di centro  $C$  fissato.
  - Determinazione della relativa *primitiva*  $U$  tale che  $\vec{f} = \nabla U$ .
  - Teorema del lavoro.
  - Conseguenze.
  - Esempi e moti particolari.
- 

**Giovedì 12 ottobre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Esercizio: La forza  $\vec{f} = m\vec{g} + k\vec{CP}$ ,  $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è conservativa? In caso affermativo (verificato che,  $\forall P \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{f}$  è posizionale e sono verificate le C.N. per l'esistenza di  $U$  tale che  $\vec{f} = \nabla U$ ) determinare  $U$ .
- Potenza: definizione.
- Forze a potenza nulla e relativo lavoro.
- Teorema del Lavoro: generalizzazione al caso di presenza forze a potenza nulla oltre che di forze conservative.
- Esempi di forze a potenza nulla.

- Determinazione del moto di un elemento soggetto alla forza elastica  $\vec{f}^a = -k\overrightarrow{OP}$ , con c.i.  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, y(0) = z(0) = 0, \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$ .
  - Piano delle fasi. Discussione qualitativa.
- 

### Venerdì 13 ottobre 2017 (2 ore - S. Carillo)

- Esercizio: La forza  $\vec{f} = -\alpha \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|^3}, \vec{f}: \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  è conservativa? In caso affermativo (verificato che  $\vec{f}$  è posizionale e verifica le C.N. per l'esistenza di  $U$  tale che  $\vec{f} = \nabla U$ ) determinare  $U$ .
  - vincoli: introduzione. Vincoli **lisci, bilaterali**.
  - Elemento vincolato ad appartenere ad una superficie regolare: c.i. compatibili con il moto.
  - Equazione  $m\vec{a} = \vec{f}^a(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t) + \vec{f}^v$  quante (e quali) sono le incognite se  $P \in \mathcal{S}, \mathcal{S}$  superficie regolare?
  - Il moto è determinato noto  $\overrightarrow{OP}: (t_0, t_1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$ , dove  $\overrightarrow{OP}(t) \equiv (u(t), v(t))^T$ .  $\overrightarrow{OP}(t) \equiv (u(t), v(t))^T$ , dove  $u$  e  $v$  indicano le *coordinate generalizzate* sulla superficie: sono le 2 incognite cinematiche.
  - Il sistema di 2 equazioni differenziali nelle due incognite  $u(t), v(t)$  determina il moto, assegnate le c.i..
  - Inoltre, con il modello di vincolo liscio, bilaterale di appartenenza alla superficie regolare  $\mathcal{S} \implies \vec{f}^v \times \vec{n} = 0 \forall t$ , dove  $\vec{n}$  indica il versore *normale* (unico) alla superficie nel punto. Noto il moto, si determina la  $\vec{f}^v$  che rappresenta la reazione che il vincolo esplica in corrispondenza al particolare moto trovato.
  - Elemento vincolato ad appartenere ad curva regolare: intersezione di due superfici regolari: c.i. compatibili con il moto.
  - Equazione  $m\vec{a} = \vec{f}^a(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t) + \vec{f}^v$  quante (e quali) sono le incognite se  $P \in \gamma, \gamma$  curva regolare?
  - Il moto è determinato noto quando è nota l'equazione oraria  $s(t)$ , dove  $s$  indica l'*ascissa curvilinea* sulla curva regolare  $\gamma$ : 1 sola incognita cinematica.
  - L'equazione differenziale *pura* nell'incognita  $s(t)$  determina il moto, assegnate le c.i..
  - Inoltre, con il modello di vincolo liscio, bilaterale di appartenenza alla curva regolare  $\gamma, \implies \vec{f}^v \cdot \vec{T} = 0, \forall t$ , dove  $\vec{T}$  indica il versore *tangente* (unico) alla curva regolare  $\gamma$ : nel punto. Noto il moto, si determina la  $\vec{f}^v$  che rappresenta la reazione che il vincolo esplica in corrispondenza al particolare moto trovato.
  - Esempio: pendolo semplice (determinazione di incognita cinematica, caratterizzazione del vincolo liscio e scrittura dell'equazione *pura* del moto).
- 

### Venerdì 13 ottobre 2017 (2 ore - A. Ciallella)

- Correzione della seconda scheda di esercizi.
  - Analisi qualitativa per la meccanica unidimensionale posizionale: determinazione delle orbite nello spazio delle fasi per il problema di equazione  $\ddot{x} = x - x^3$ .
-

## Mercoledì 18 ottobre 2017 (3 ore - S. Carillo)

- Dinamica dell'elemento libero (osservazione): se l'elemento libero soggetto ad una forza elastica di centro  $C$  fisso, è soggetto anche forza costante (qualunque direzione), p.e. peso, il moto è *qualitativamente* identico a quello della presenza della sola forza elastica.
  - Vicoli bilaterali ed unilaterali lisci.
  - Vincolo liscio bilaterale: richiamo caratterizzazione.
  - Metodo di soluzione del problema: soluzione conseguenze pure dell'equazione della dinamica e, poi, determinazione della  $\vec{f}^v$  in corrispondenza al moto trovato.
  - Vincolo liscio unilaterale: caratterizzazione.
  - C.i. e moti compatibili con la realizzazione del *contatto* nell'intervallo di tempo  $(t_0, t_1)$ ,  $t_1 > t_0$ .
  - Metodo di soluzione del problema:
    - [1] ipotesi di *moto di confine* in corrispondenza a c.i. compatibili, e determinazione del moto;
    - [2] calcolo della  $\vec{f}^v(t)$  che il vincolo deve esplicitare in corrispondenza al moto trovato;
    - [3] verifica che la  $\vec{f}^v(t)$  trovata sia compatibile  $\forall t$  con il vincolo unilaterale (in caso affermativo il moto è di confine)
    - [4] se, al contrario,  $t^* > t_0$  tale che  $\vec{f}^v(t^*) = 0$  e, per  $t > t^*$ ,  $\vec{f}^v(t)$  non sia esplicabile dal vincolo, allora si ha *distacco*, cioè, nel successivo intervallo di tempo  $(t^*, t_2)$ ,  $t_2 > t^*$ , non si ha il contatto e, quindi, in tale *fase di moto* l'elemento è libero; il moto va determinato considerando l'istante  $t = t^*$  come istante iniziale e le incognite cinematiche sono 3. la fase di moto termina quando, eventualmente, per  $t = t^{**}$  si realizza nuovamente il contatto vincolo-punto. In tale caso, se la velocità  $\vec{v}(t^{**})$  è compatibile con il moto di confine, lo studio riprende dal punto [1].
  - Pendolo semplice: posizioni di equilibrio.
  - Pendolo semplice: discussione qualitativa.
- 

## Giovedì 19 ottobre 2017 (3 ore - S. Carillo)

- Pendolo semplice: ancora discussione qualitativa.
  - Calcolo del periodo per  $E_0 > 2mgR$ ,  $E_0 < 2mgR$ .
  - Dimostrazione che il moto non è periodico nel caso  $E_0 = 2mgR$ .
  - Discussione sui risultati ottenuti: significato analitico, interpretazione fisica del risultato e confronto tra i due.
  - Vincolo liscio unilaterale:
    1. metodo di soluzione di *problemi di distacco*;
    2. esempio: elemento vincolato ad appartenere all'interno di una superficie cilindrica (circolare retta) con asse orizzontale e velocità iniziale ortogonale all'asse e, quindi, compatibile con il moto di confine.
-

**Venerdì 20 ottobre 2017** (2 ore - S. Carillo)

- Caratterizzazione statica di *vincoli con attrito*.
  - Vincoli bilaterali lisci e non: confronto delle diverse caratterizzazioni.
  - Forze *generalmente conservative*
  - Vincoli bilaterali lisci e non: determinazione delle posizioni di equilibrio per un elemento vincolato ad appartenere ad una superficie regolare e ad una curva regolare.
  - Esempio: determinazione delle posizioni di equilibrio per un elemento pesante vincolato ad appartenere ad un piano inclinato con o senza attrito.
  - Discussione del risultato in funzione del *coefficiente di attrito statico*.
  - Caratterizzazione dinamica di *vincoli con attrito*.
  - Vincoli con attrito e dissipazione dell'energia.
- 

**Venerdì 20 ottobre 2017** (2 ore - A. Ciallella)

- Correzione della terza scheda di esercizi.
- 

**Mercoledì 25 ottobre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Vincoli bilaterali lisci e scabri: confronto.
  - Vincolo scabro bilaterale e dissipazione dell'energia.
  - Interpretazione nel piano delle fasi.
  - Dimostrazione che  $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$ , dove  $m, \alpha, k$  costanti positive, rappresenta un *sistema dissipativo*.
  - Spazi rigidi  $RC, RC', R\Gamma$  e studio del moto di un corpo rigido.
  - Velocità angolare.
  - Angoli di Eulero.
  - Espressione di  $\vec{\omega}$  in funzione di  $\vec{\varepsilon}_k$  e  $\vec{e}_k, k = 1, 2, 3$ .
  - *Formula fondamentale di cinematica*.
  - Atto di moto rigido: campo vettoriale elicoidale. Analogia con il *campo momento*
- 

**Giovedì 26 ottobre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Moti relativi.
  - Espressione delle velocità *assoluta, relativa* e di *trascinamento*  $\vec{v}^a = \vec{v}_\Omega + \vec{v}^r + \vec{\omega} \times \overrightarrow{\Omega P}$ .
  - Espressione dell'accelerazione *assoluta, relativa* e di *trascinamento*.
  - Spazi inerziali e forze apparenti.
  - Espressioni di  $\vec{\omega}$ : proiezioni sugli assi dello spazio *fisso*  $RC$  e di quello *mobile*  $R\Gamma$ .
-

**Venerdì 27 ottobre 2017** (1 ora - S. Carillo)

- Posizioni di equilibrio stabili: definizione & esempi:
    1. elemento libero soggetto ad una forza elastica;
    2. elemento *pesante* vincolato, bilateralmente, ad una circonferenza liscia, in un piano verticale;
    3. elemento *pesante* vincolato, unilateralmente (appoggio), ad un piano orizzontale.
  - Confronto, tra posizioni di equilibrio stabili e non, in particolare in riferimento agli esempi.
  - Corrispondente rappresentazione grafica nel piano delle fasi.
- 

**Venerdì 27 ottobre 2017** (2 ore - A. Ciallella)

- Elemento vincolato ad una superficie liscia definita da  $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ . Equazioni del moto e calcolo della reazione vincolare proiettando lungo le direzioni ortogonale e tangenziale al vincolo. Possibili dati iniziali per cui si abbiano moti circolari.
- 

**Giovedì 2 novembre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Cinematica rigida.
  - Campo vettoriale delle velocità in un atto di moto rigido.
  - Moti rigidi piani: proprietà degli atti di moto. Applicazioni della formula fondamentale della cinematica.
  - Atti di moto rigidi piani: ruota-rotai.
  - Vincolo di *puro rotolamento* e sue proprietà.
  - Profili coniugati: *base* e *rulletta* e loro determinazione.
  - Moto ruota-rotai nel caso generico: base e rulletta nel caso di strisciamento.
  - Introduzione alla dinamica del corpo rigido.
  - Incognite cinematiche per l'individuazione del moto di un corpo rigido: coordinate di un punto  $\Omega$  del CR ed angoli di Eulero  $RF$ , con origine in  $\Omega$  rispetto ad  $RC'$ , con assi equiorientati con quelli fissi.
- 

**Venerdì 3 novembre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Posizioni di equilibrio stabili e non: richiamo di definizione & esempi:
    1. elemento materiale pesante, vincolato, bilateralmente, ad un piano orizzontale liscio: tutte le posizioni sono di equilibrio: nessuna di equilibrio stabile.
    2. elemento materiale pesante, vincolato, bilateralmente, ad un piano orizzontale liscio soggetto ad una forza elastica attrattiva: una posizione di equilibrio stabile (centro forza elastica);
  - Stabilizzazione delle posizioni di equilibrio mediante una forza a potenza nulla del tipo  $\mu \vec{e}_3 \times \vec{v}$ .
  - elemento materiale pesante, vincolato, bilateralmente, ad un piano orizzontale liscio che si muove di moto rotatorio attorno ad un asse verticale: stabilizzazione delle posizioni di equilibrio per opportune scelte di  $\vec{\omega}$ .
  - esempi di traiettorie polari: ellissografo ed altri esempi.
-

**Venerdì 3 novembre 2017** (2 ore - A. Ciallella)

- Esercizi dalla scheda 4 – 5.
- 

**Mercoledì 8 novembre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Sollecitazione attiva: somma e momento totale rispetto ad un punto. Equivalenza.
  - Proprietà del *campo vettoriale momento*  $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{AB} \times \vec{F}$ .
  - asse centrale della sollecitazione.
  - Casi particolari
    - unica coppia
 
$$\vec{F} = 0 \implies \vec{M} = \vec{M}_B = \vec{M}_A, \forall A, B \in \mathbb{R}^3.$$
    - unica forza: detto  $r$  l'asse centrale della sollecitazione, parallelo ad  $\vec{F}$  segue che  $\forall Q \in r \implies \vec{M}_Q = 0$ .
  - Caso generico.
  - Sollecitazioni equivalenti nello studio del moto di corpi rigidi.
  - Sollecitazione *peso*.
  - Prima equazione cardinale per un corpo rigido *pesante* ricavata dal sistema delle equazioni della dinamica per un sistema rigido di  $N$  punti materiali.
  - Momento totale della quantità di moto  $\vec{K}_A$  rispetto ad un polo arbitrario  $A$ .
  - $\dot{\vec{K}}_A$  rispetto ad un polo arbitrario  $A$ .
  - Baricentro: definizione.
  - Esercizio: determinare l'asse istantaneo di rotazione, poi, base e rulletta in un esempio.
- 

**Giovedì 9 novembre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Momento totale della quantità di moto  $\vec{K}_A$  rispetto ad un polo arbitrario  $A$ .
  - Derivata del Momento totale della quantità di moto  $\dot{\vec{K}}_A$  rispetto ad un polo arbitrario  $A$ .
  - *Moto attorno al baricentro*: definizione.
  - Seconda equazione cardinale.
- 

**Venerdì 10 novembre 2017** (2 ore - S. Carillo)

- Determinazione di volume, massa, posizione del baricentro di un corpo (cono circolare retto). Osservazioni sull'ellissoide centrale di inerzia.
  - Calcolo del momento di inerzia del cono rispetto al suo asse.
  - Equazioni cardinali del corpo rigido libero.
  - *Moto attorno al baricentro*: Equazioni di Eulero per un corpo rigido libero: caso di sollecitazione  $\vec{M}_G^a = 0$ .
  - Ricerca di moti rotatori attorno ad asse fisso tra le soluzioni dell'Equazioni di Eulero omogenea: inizio.
-

**Venerdì 10 novembre 2017** (2 ore - A. Ciallella)

- Esercizi dalla scheda 6.
- 

**Mercoledì 15 novembre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Omografia di inerzia e sue proprietà.
  - Espressione di  $\vec{K}_G$  e di  $\dot{\vec{K}}_G$  mediante l'omografia di inerzia.
  - Teorema di Huyghens.
  - Casi particolari
- 

**Giovedì 16 novembre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Sollecitazioni posizionali nel caso di un C.R..
  - Sollecitazioni conservative ed equazioni cardinali C.R..
  - Espressione del lavoro C.R..
  - Sollecitazioni esterne a potenza nulla.
  - Equazioni cardinali C.R. vincolato. Vincoli bilaterali lisci.
  - Snodo sferico ed equazioni di Eulero.
  - Soluzioni particolari. Esercizio: determinare le c.i., se esistono, in corrispondenza alle quali la soluzione delle equazioni di Eulero omogenee ( $\vec{M}_G^a = 0$ ) è un moto rotatorio attorno ad un asse fisso.
  - Cerniera cilindrica.
  - Metodo di soluzione di problemi di dinamica del C.R. vincolato.
- 

**Venerdì 17 novembre 2017** (2 ore - S. Carillo)

- Sollecitazioni equivalenti.
  - Determinazione asse centrale della sollecitazione.
  - Esempio 1: sollecitazione peso e sua equivalenza a  $G, M\vec{g}$ .
  - Esempio 2 (non fisico): somma e momento totale di una sollecitazione assegnata.
  - Esempio 3: sollecitazione centrifuga.
- 

**Venerdì 17 novembre 2017** (2 ore - A. Ciallella)

- Esercizi di dinamica.
- 
-

**Mercoledì 22 novembre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Corpo rigido vincolato.
  - Vincolo di *cerniera cilindrica*: moto di una lamina a forma di triangolo rettangolo con asse della cerniera coincidente con un cateto.
    - un solo grado di libertà e relativa incognita cinematica  $\theta$ ;
    - calcolo momenti di inerzia;
    - Derivazione di  $\vec{K}_\Omega$  e di  $\dot{K}_\Omega$ ,  $\Omega$  punto del CR sull'asse della cerniera.
    - determinazione del moto: il moto rotatorio (per effetto del vincolo) è rotatorio uniforme dall'equazione differenziale *pura* ottenuta dalle equazioni cardinali.
  - Lo stesso risultato, visto che vi è un solo grado di libertà, si ottiene dal teorema di conservazione dell'energia.
  - Determinato il moto, in ogni caso, dalle altre equazioni cardinali si determina la sollecitazione vincolare corrispondente ad esso.
  - Determinazione posizioni di equilibrio per un CR vincolato con una cerniera cilindrica.
    - Quindi, il problema può essere studiato come un problema di *statica relativa* in un riferimento che si muove di moto rotatorio uniforme.
    - La sollecitazione centrifuga è equivalente ad una unica forza applicata all'asse centrale.
    - Determinazione asse centrale (che NON contiene il baricentro).
- 

**Giovedì 23 novembre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Moto di una lamina piana pesante appartenente ad un piano liscio orizzontale.
  - Corpo rigido vincolato. Vincoli di *guida prismatica*, *collare cilindrico* e *appartenenza ad un piano liscio*.
  - Equazioni cardinali C.R. relative.
  - Uso del teorema di conservazione con calcolo di energia cinetica e potenziale.
  - Sistemi di corpi rigidi vincolati.
  - Bipedolo: calcolo energia cinetica e potenziale.
- 

**Venerdì 24 novembre 2017** (2 ore - S. Carillo)

- Vincoli unilaterali.
  - Appoggio ad un piano.
  - Metodo di studio del moto di un CR soggetto a vincolo unilaterale.
  - *Appoggio ad un piano liscio*.
  - *Appoggio ad un piano scabro*.
  - Moto di un disco appoggiato su di un piano inclinato liscio.
  - Moto di un disco appoggiato su di un piano inclinato scabro.
-

**Venerdì 24 novembre 2017** (2 ore - A. Ciallella)

- Esercizi di dinamica del CR.
- 

**Mercoledì 29 novembre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Corpo rigido vincolato.
    - Sbarretta vincolata, in un estremo, ad una cerniera cilindrica: determinare di  $\vec{F}$  in modo tale che la posizione assegnata sia di equilibrio;
    - Sbarretta vincolata, in un estremo, ad una cerniera cilindrica ed appoggiata ad un piano liscio nell'altro estremo: la posizione assegnata è di equilibrio? In caso affermativo, calcolo della corrispondente sollecitazione vincolare.
    - moto di un disco omogeneo pesante appoggiato ad un piano inclinato: confronto tra i casi liscio, scabro nei casi di *puro rotolamento* ( $3\Phi_s > \tan \alpha$ ) e nel caso di velocità di strisciamento non nulla.
- 

**Giovedì 30 novembre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Dinamica dei sistemi.
  - Vincoli olonomi bilaterali e non.
  - Vincoli dipendenti ed indipendenti dal tempo.
  - Gradi di libertà e coordinate Lagrangiane.
  - Velocità e spostamenti *virtuali*.
  - Differenza tra velocità *virtuali* e velocità *possibili* nel caso di vincoli dipendenti dal tempo. Analisi degli esempi seguenti:
    - un elemento vincolato ad appartenere alla circonferenza  $x^2 + y^2 + z^2 = \omega^2 t^2, z = 0, 1 < t < 2$ ;
    - due elementi vincolati ad appartenere alla superficie sferica  $x^2 + y^2 + z^2 = \omega^2 t^2, 1 < t < 2$ .
  - Caratterizzazione dei vincoli bilaterali e non mediante il *lavoro virtuale* della sollecitazione vincolare.
  - Dal *sistema fondamentale della dinamica* ( $N$  equazioni vettoriali) alle  $n$  equazioni di Lagrange, dove  $n = 3N - l$ , essendo  $l$  il numero dei vincoli.
- 

**Venerdì 1 dicembre 2017** (2 ore - S. Carillo)

- esempi di Velocità e spostamenti *virtuali* in casi di vincoli bilaterali
  - $P \in \gamma, \gamma : x = R \cos \varphi, y = 0, z = R(1 + \sin \varphi), \varphi \in [-\pi, \pi]$
  - $P \in \gamma, \gamma : x = R(t) \cos \varphi, y = 0, z = R(t)(1 + \sin \varphi), \varphi \in [-\pi, \pi], 1 < t < 2$
  - Pendolo composto.

e unilaterali:

- Appoggio ad un piano.
  - Appoggio ad una superficie regolare.
  - *Principio dei lavori virtuali.*
  - Determinazione delle posizioni di equilibrio negli esempi di vincoli bilaterali trattati.
- 

### Venerdì 1 dicembre 2017 (2 ore - A. Ciallella)

- Esercizi di dinamica del CR.
- 

### Mercoledì 6 dicembre 2017 (2 ore - S. Carillo)

corpi soggetti a vincoli bilaterale

- Esercizio: determinare il moto di una sbarretta pesante, i cui estremi  $A$  e  $B$  sono vincolati ad una circonferenza liscia
- Pendolo composto.

e corpi soggetti a vincoli unilaterali:

- Appoggio ad un piano.
- Appoggio ad una superficie regolare.

*Principio dei lavori virtuali.*

Determinazione delle posizioni di equilibrio negli esempi di vincoli bilaterali trattati.

---

### Giovedì 7 dicembre 2017 (3 ore - S. Carillo)

- esempi di velocità e spostamenti *virtuali* in casi di vincoli bilaterali.
- determinazione di configurazioni di equilibrio per un sistema a vincoli perfetti soggetto a sollecitazioni conservative.

$$- P \in \gamma, \quad \gamma : x = R \cos \varphi, y = 0, z = R(1 + \sin \varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi]$$

$$- P \in \gamma, \quad \gamma : x = R(t) \cos \varphi, y = 0, z = R(t)(1 + \sin \varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], 1 < t < 2$$

– Bependolo.

e unilaterali:

- Appoggio ad un piano.
  - Appoggio ad una superficie regolare.
  - *Principio dei lavori virtuali.*
  - Determinazione delle posizioni di equilibrio negli esempi di vincoli bilaterali trattati.
  - Definizione di configurazione di equilibrio stabile.
  - Teorema di Dirichlet.
-

**Lunedì 11 dicembre 2017** (2 ore - A. Ciallella)

- Esercizi di dinamica del CR.
- 

**Mercoledì 13 dicembre 2017** (3 ore - S. Carillo)

Teoremi di

- Studio di configurazioni di equilibrio:
  - Teorema di Liapunov.
  - Applicazioni dei Teoremi di Dirichlet e Liapunov.
  - Bipedolo: configurazioni di equilibrio e loro stabilità.
  - Linearizzazione delle equazioni di Lagrange nell'intorno di configurazioni di equilibrio stabile.
- 

**Giovedì 14 dicembre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Osservazioni su equazioni differenziali non lineari: non vale il principio di sovrapposizione delle soluzioni.
  - Equazioni di Lagrange non lineari.
  - Loro linearizzazione nell'intorno di configurazioni di equilibrio stabile.
  - Esempi.
- 

**Venerdì 15 dicembre 2017** (3 ore - S. Carillo)

- Moti rigidi sferici.
  - Moti alla Poincaré:
    - moto di un corpo rigido vincolato con uno snodo sferico in  $\Omega$  del corpo con  $\vec{M}_\Omega = 0$ .
    - moto *attorno al baricentro* di un corpo rigido libero pesante.
- 

**Venerdì 15 dicembre 2017** (2 ore - A. Ciallella)

- Esercizi di ricapitolazione.
-

## Mercoledì 20 dicembre 2017 (3 ore - S. Carillo)

Precisazioni sulla velocità angolare  $\omega$  in un generico moto rigido

- $\omega = \dot{\psi}\vec{e}_3 + \dot{\theta}\vec{N} + \dot{\phi}\vec{e}_3$
  - componenti di  $\vec{N}, \vec{e}_3, \vec{e}_3$  negli spazi fisso e mobile.
  - Moto rigido sferico: ancora moti alla Poincaré e moto giroscopio pesante (*trottola*).
  - Bipedolo: configurazioni di equilibrio e loro stabilità.
  - Linearizzazione delle equazioni di Lagrange nell'intorno di configurazioni di equilibrio stabile.
- 

## Giovedì 21 dicembre 2017 (3 ore - S. Carillo)

Esercizi di ricapitolazione: sistema a vincoli perfetti costituito da 2 dischi omogenei pesanti soggetti al peso e a due forze elastiche (es 5.2.8 testo [2]).

- Equazioni di Lagrange non lineari.
  - Loro linearizzazione nell'intorno di configurazioni di equilibrio stabile.
  - Modi normali.
- 

## Venerdì 22 dicembre 2017 (4 ore - S. Carillo, 2 ore A. Ciallella)

- Prova Scritta Anticipata.
- 

## References

- [1] M. Lo Schiavo: *Argomenti e metodi di meccanica razionale*, Compomat editore (II edizione) 2016.
- [2] M. Lo Schiavo: *Complementi ed Esercizi di Meccanica Razionale*, Ed Esculapio, 2014.
- [3] M. Fabrizio: *Elementi di Meccanica Classica*, Zanichelli 2002.
- [4] N. Ianiro: *Appunti in rete* (solo parte del programma).