FISICA MATEMATICA – MMER
Diario delle lezioni A.A. 2019–20[1]

Questo documento è curato da Sandra Carillo, (6 CFU) docente del corso.
Si rimanda lo studente a consultare il sito elearning e quello del Dip. SBAI; il primo dedicato al materiale distribuito in aula ed ulteriori informazioni di interesse per chi frequenta il corso mentre nel secondo si trovano le informazioni di carattere organizzativo ed informativo.

Lunedì 23 settembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Introduzione al corso: elenco principali argomenti trattati.
- Notazione e finalità del corso.
- Significato di modello matematico.
- Equazioni differenziali alle derivate ordinarie: richiami ed esempi.
- Equazioni differenziali ordinarie **lineari** a coefficienti costanti: soluzione generale ed equazione caratteristica.
- Equazione del moto armonico: soluzione generale.
- Soluzione **per serie** di O.D.E. lineari a coefficienti costanti con esempi. Si cerca

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

  - Esempio 1:
$$y' + \beta y = 0 \tag{2}$$
    si ottiene la soluzione già trovata mediante il polinomio caratteristico:
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^n}{n!} x^n \equiv e^{-\beta x} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = c e^{-\beta x}\,, \ \ \forall c \in \mathbb{R}. \tag{3}$$
  - Esempio 2:
$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{4}$$
    si ottiene la soluzione già trovata mediante il polinomio caratteristico. Indicate con $y_1(x)$ e $y_2(x)$, due soluzioni indipendenti l'una dall'altra, si ottiene, per $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$
$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad \equiv \cos(\omega x) \tag{5}$$
    Analogamente (assegnato a casa agi studenti) se si scelgono $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ si ottiene la seconda soluzione indipendente dalla precedente:
$$y_2(x) = \sin(\omega x) \tag{6}$$
    e, quindi, la soluzione generale dell'equazione del moto armonico (4), è
$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,, \ \ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{7}$$
    dove $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono date, rispettivamente da (5) e (6).

---

[1] Nel seguito *studente* indica, naturalmente, *studente e/o studentessa* e, analogamente, al plurale.

Mercoledì 25 settembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Richiami equazioni differenziali **lineari** alle derivate ordinarie: equazione caratteristica e teorema fondamentale dell'algebra.
- Molteplicità della soluzioni dell'equazione caratteristica e soluzioni complesse coniugate (a coppie).
- Equazione di Eulero:

  a soluzione generale $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con $x \mapsto y(x)$.

  b Linearizzazione mediante l'introduzione della nuova variabile indipendente $t := \log x$.
- Equazioni differenziali **lineari** alle derivate ordinarie: generalizzazione al caso di coefficienti continui.

Giovedì 26 settembre 2018 *(2 ore - S. Carillo)*

- Equazioni di Eulero: precisazione nel caso di soluzioni con molteplicità maggiore di 1 dell'equazione caratteristica dell'equazione lineare associata.
- Metodo di Frobenius: illustrazione con esempi.
- Equazione di Legendre:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \beta(\beta+1)y = 0 \;, \quad \beta \text{ assegnato.} \tag{8}$$

Lunedì 30 settembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

(lezione iniziata alla lavagna elettronica per problemi di connessione).

- Metodo di Frobenius: ricapitolazione dettagliata del metodo con esempi, riferiti ai tre casi in cui l'**equazione indiciale** ammette, rispettivamente, soluzioni

  caso 1

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \;, \;\; \alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$$

  caso 2

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

  caso 3

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \;, \;\; \alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}$$

Mercoledì 2 ottobre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Teoremi di conservazione dell'energia e sistemi meccanici ad un solo grado di libertà.
- Esempio: pendolo semplice. Cioè, punto P di massa m, soggetto al peso, vincolato, bilateralmente e senza attrito, ad appartenere ad una circonferenza, in un piano verticale.
  - equazione del moto e teorema di conservazione.
  - piano delle fasi.
  - piccole oscillazioni.

– motivazione dei metodi perturbativi prendendo spunto dal problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta) \\ \theta(0) \ = \varepsilon \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

dove $\omega^2 := \frac{g}{R}$, $0 < \varepsilon << 1$ avendo indicato con R il raggio della circonferenza cui è vincolato il punto P.

– Introducendo $x := \frac{\theta}{\varepsilon}$, il problema (12) si scrive

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 \sin(\varepsilon x) \\ x(0) \ = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Giovedì 3 ottobre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Pendolo semplice: posizioni di equilibrio e relativa stabilità.

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta) \\ \theta(0) \ = 0 \quad (\text{oppure } \pi) \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \theta(t) = 0 \ \ (\text{risp. } \ \theta(t) = \pi) \ \text{ soluzione unica} \tag{11}$$

- $\theta(0) \ = 0$ posizione di equilibrio stabile: i.e.

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta) \\ \theta(0) \ = \varepsilon \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}[\dot{\theta}(t)]^2 + [1 - \cos(\theta(t))] \leq 1 - \cos(\varepsilon) \approx \frac{\varepsilon^2}{2} \ \ , \ \ \forall t > 0 \tag{12}$$

- Metodo perturbativo diretto (STFWD): illustrazione ed esempi.
  - Oscillatore *debolmente* smorzato:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ x(0) \ = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

    * Il sistema è *debolmente* dissipativo: dimostrazione.
    * Rappresentazione del sistema dinamico nel piano delle fasi.
    * Metodo perturbativo diretto applicato al *toy problem* per illustrare il metodo perturbativo diretto (STFWD)

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)\ \varepsilon^k. \tag{14}$$

    * Convergenza uniforme e condizione $|x_k(t)| < M \ , \ \forall k$.

Lunedì 7 ottobre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Equazione di Duffing:

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \frac{\varepsilon^2}{6}x^3 = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ x(0) \ = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

- Il sistema è *conservativo*: dimostrazione.

- Rappresentazione del sistema dinamico nel piano delle fasi.
- Applicazione del metodo perturbativo diretto (STFWD) (14).
- Determinazione di $x(t) \simeq x_0(t)$ e $x(t) \simeq x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$.
- Confronto tra le due soluzioni approssimate e condizione di limitatezza di $x_0(t)$ e $x_1(t)$ ed intervallo di validità della soluzione approssimata trovata.
- Osservazione: in questo caso non è possibile trovare analiticamente la soluzione esatta. Il confronto, quindi, può solo essere fatto con soluzioni numeriche che, quindi, sono affette da errori di calcolo.

Mercoledì 9 ottobre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Metodo delle scale multiple: illustrazione ed esempi.
Oscillatore *debolmente* smorzato:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ x(0) \ = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

- N.B. Già dimostrato che il sistema è *debolmente* dissipativo e fornito la rappresentazione del sistema dinamico nel piano delle fasi.
- Metodo delle scale multiple applicato al *toy problem* per illustrare il metodo

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t,\tau)\ \varepsilon^k \quad , \quad \tau := \varepsilon t. \tag{17}$$

- Convergenza uniforme e condizione $|x_k(t,\tau)| < M \quad , \quad \forall k$.
- Osservazione sull'operatore

$$\frac{d}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{\partial t} + \varepsilon \frac{d}{\partial \tau}$$

- Costruzione della successione di problemi ottenuti applicando il principio di identità dei polinomi alla serie di potenze in ε.
- Osservazioni sulle condizioni iniziali da imporre ai vari ordini.
- Determinazione di $x(t) \simeq x_0(t,\tau)$ e $x(t) \simeq x_0(t,\tau) + \varepsilon x_1(t,\tau)$.
- Confronto tra le due soluzioni approssimate e condizione di limitatezza di $x_0(t,\tau)$ e $x_1(t,\tau)$ ed intervallo di validità della soluzione approssimata trovata.
- Soluzione esatta, già vista nella lezione precedente: richiamo.
- Confronto tra le soluzioni approssimate e quella esatta.
- Illustrazione dell'applicazione del metodo utilizzando il calcolo simbolico (MUPAD toolbox di MatLab).
- Visualizzazione, con proiezione sullo schermo, dei risultati ottenuti e confronto tra il metodo perturbativo diretto, quello delle scale multiple e la soluzione esatta.

Giovedì 10 ottobre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Problemi singolari con assegnate condizioni al contorno: illustrazione ed esempi. Consideriamo il seguente esempio di *strato limite*:

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \; = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \tag{18}$$

- N.B.Il problema è un *problema perturbativo singolare* poichè ponendo $\varepsilon = 0$ l'ordine dell'equazione differenziale è ridotto dal secondo al primo.
- L'applicazione del metodo perturbativo diretto in (37), definito mediante la (14), fornisce, all'*ordine zero*,

  $$\begin{cases} 2y_0' + 2y_0 = 0 \quad , \\ y_0(0) \; = 0 \quad \text{oppure} \quad y_0(1) = 1 \end{cases} \tag{19}$$

  N.B. abbiamo ottenuto una equazione differenziale, del I ordine cui non possiamo imporre le due condizioni al contorno assegnate. Quindi, dobbiamo scegliere quale condizione imporre. Poichè la soluzione unica di (19) che soddisfa la condizione $y_0(0) \; = 0$ è la soluzione banale $y_0(x) \; = 0$, consideriamo

  $$\begin{cases} 2y_0' + 2y_0 = 0 \quad , \; a < x < 1, a << 1 \\ y_0(1) = 1 \end{cases} \tag{20}$$

  Ipotizziamo, cioè che vi sia uno *strato sottile* nell'intorno (destro) dell'origine. La soluzione del problema (20) è:

  $$y_0(x) = e^{1-x} \tag{21}$$

  che approssima la soluzione del problema assegnato per $a < x < 1$ dove $0 < a << 1$.
- Metodo dello Strato limite: idea del metodo e applicazione all'esempio considerato.
  1. Ipotesi di strato *sottile* nell'intorno di $x = 0$ nel quale la derivata seconda di y sia di ordine ε^{-1} in modo tale che il prodotto $\varepsilon y''$ non sia un termine *piccolo* rispetto agli altri termini che compaiono nell'equazione differenziale. In dettaglio
  2. Introduzione delle nuove variabili:

     $$X := \frac{x}{\varepsilon^\alpha} \quad , \quad Y := y \quad \text{when} \quad x \in (0, a), \quad a << 1 \tag{22}$$

  3. determinazione di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ in modo tale che, nelle nuove variabili X, Y, l'equazione differenziale non sia singolare. Cioè, dalla sostituzione di (22) in (18), si ottiene:

     $$\varepsilon^{1-2\alpha} Y'' + 2\varepsilon^{-\alpha} Y' + 2Y = 0 \tag{23}$$

     se chiediamo che i termini

     $$(1) \text{ order of } (2) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 1$$

     invece

     $$(1) \text{ order of } (3) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

  4. analizziamo le due scelte e vediamo che la seconda NON risolve il problema perchè produce

     $$Y'' + 2\varepsilon^{-1/2} Y' + 2Y = 0$$

     invece per $\alpha = 1$, si ottiene l'equazione differenziale:

     $$\varepsilon^{-1} Y'' + 2\varepsilon^{-1} Y' - Y = 0.$$

     che, moltiplicata per $\varepsilon > 0$, fornisce

     $$Y'' + 2Y' + 2\varepsilon Y = 0. \tag{24}$$

5. Applicazione all'equazione (24) del metodo perturbativo diretto: cioè cerchiamo

$$Y(X) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(X)\, \varepsilon^k. \tag{25}$$

che verifica la condizione $Y(0) = 0$.

6. Applichiamo il metodo perturbativo diretto al problema ottenuto.
7. Osservazione: per $x \in (0,1)$, segue $X \in (0,+\infty)$, per $\varepsilon \to 0$. Quindi otteniamo una famiglia ad un parametro di soluzioni.
8. Il parametro libero viene determinato imponendo il *matching* della soluzione ottenuta nell'intorno dell'origine. Imponiamo

$$\lim_{X\to\infty} Y_0(X) = A, \quad \text{dove} \quad A := \lim_{x\to 0} y_0(x). \tag{26}$$

9. costruiamo la *soluzione composita*, all'ordine zero:

$$y_{comp}(x) = y_0(x) + Y_0(\frac{x}{\varepsilon}) - A. \tag{27}$$

La soluzione ottenuta verifica la condizione al contorno nel punto $x = 0$.

- costruzione della soluzione esatta del problema.
- confronto tra soluzione esatta ed approssimata.

Lunedì 14 ottobre 2018 *(2 ore - S. Carillo)*

Problemi singolari con assegnate condizioni al contorno: illustrazione ed esempi. Consideriamo il seguente esempio di *strato limite*:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 y'' + \varepsilon x y' - y = -e^x \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \tag{28}$$

- N.B.Il problema è un *problema perturbativo singolare* poichè ponendo $\varepsilon = 0$ l'ordine dell'equazione differenziale è ridotto.
- L'applicazione del metodo perturbativo diretto in (37), definito mediante la (14), fornisce

$$y_0 = e^x \tag{29}$$

N.B. non abbiamo ottenuto una equazione differenziale, ma una funzione della variabile x che non verifica né la condizione $y(0) \ = 2$, né la condizione $y(1) \ = 1$. Quindi, possiamo pensare che la soluzione del problema assegnato possa essere approssimata dalla funzione $y_0(x) = e^x$ per $a < x < b$ dove $0 < a << 1$ e $0 << b < 1$.

- Metodo dello Strato limite: idea del metodo e applicazione all'esempio considerato.
  - Ipotesi di strato *sottile* nell'intorno di $x = 0$ nel quale la derivata seconda di y sia di ordine ε^{-2} in modo tale che il prodotto $\varepsilon^2 y''$ non sia un termine *piccolo* rispetto agli altri termini che compaiono nell'equazione differenziale. In dettaglio
  - Introduzione delle nuove variabili:

$$X := \frac{x}{\varepsilon^\alpha} \quad , \quad Y := y \quad \text{when} \quad x \in (0,a), \quad a << 1 \tag{30}$$

  - determinazione di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ in modo tale che, nelle nuove variabili X, Y, l'equazione differenziale non sia singolare. Cioè, dalla sostituzione di (30) in (37), si ottiene:

$$\varepsilon^{2-2-\alpha} Y'' + \varepsilon X Y' - Y = -e^{\varepsilon^{-\alpha} X} \tag{31}$$

se chiediamo che i termini

$$(1) \ \text{order of} \ (3) \implies \alpha = 1$$

invece

$$(1) \ \text{order of} \ (2) \implies \alpha = \frac{1}{2}$$

– analizziamo le due scelte e vediamo che la seconda NON risolve il problema perchè produce

$$\varepsilon Y'' + \varepsilon X Y' - Y = -e^{\sqrt{\varepsilon} X}$$

invece per $\alpha = 1$, si ottiene l'equazione differenziale:

$$Y'' + \varepsilon X Y' - Y = -e^{\varepsilon X}. \tag{32}$$

– Applicazione all'equazione (32) del metodo perturbativo diretto: cioè cerchiamo

$$Y(X) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(X)\, \varepsilon^k. \tag{33}$$

che verifica la condizione $Y(0) = 2$.

– Applichiamo il metodo perturbativo diretto al problema ottenuto.

– Osservazione: per $x \in (0,1)$, segue $X \in (0,+\infty)$, per $\varepsilon \to 0$. Quindi otteniamo una famiglia ad un parametro di soluzioni.

– Il parametro libero viene determinato imponendo il *matching* della soluzione ottenuta nell'intorno dell'origine. Imponiamo

$$\lim_{X\to\infty} Y_0(X) = A, \quad \text{dove} \quad A := \lim_{x\to 0} y_0(x). \tag{34}$$

– costruiamo la *soluzione composita*, all'ordine zero:

$$y_{comp}(x) = y_0(x) + Y_0(\frac{x}{\varepsilon}) - A. \tag{35}$$

La soluzione ottenuta verifica la condizione al contorno nel punto $x = 0$.

– Quindi, bisogna ripetere lo stesso procedimento nell'intorno del punto $x = 1$. Si introducono quindi le nuove variabili:

$$\widetilde{x} := \frac{x-1}{\varepsilon^\beta} \quad , \quad \widetilde{y} := y \quad \text{when} \quad x \in (b,1), \quad 0 << b \tag{36}$$

– determinazione di $\beta \in \mathbb{R}^+$ in modo tale che, nelle nuove variabili $\widetilde{x}, \widetilde{y}$, l'equazione differenziale non sia singolare.

– si ripete la stessa procedura par lo *strato sottile* nell'intorno del punto $x = 1$. (i.e., trovato β, si scrive l'equazione differenziale non singolare nella incognita funzione $\widetilde{y} : \mathbb{R}^- \to$, si applica ad essa il metodo perturbativo diretto, imponendo la condizione $\widetilde{y}(1) = 1$, trovata e determinando il parametro *libero* imponendo la condizione di *matching* della soluzione ottenuta nell'intorno del punto $x = 1$.

Mercoledì 16 ottobre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Problemi singolari con assegnate condizioni al contorno: illustrazione ed esempi. Consideriamo il seguente esempio di *strato limite*:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 y'' + \varepsilon x y' - y = -e^x \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \tag{37}$$

- ricapitolazione del metodo di soluzione per il problema singolare con 2 strati limite nei due estremi dell'intervallo.
- costruzione della soluzione *composita* all'*ordine zero*

$$\begin{aligned} y_{0c}: \quad (0,1) &\to \quad \mathbb{R} \\ x &\mapsto \quad y_{0c}(x) \end{aligned} \tag{38}$$

- discussione del risultato ottenuto.

- visualizzazione della soluzione composita all'ordine zero, costruita con il calcolo simbolico
  `http://www.dmmm.uniroma1.it/~sandra.carillo/Pert_Sing08giu_casoa.html`
- determinazione della soluzione composita all'ordine successivo: illustrazione dei successivi problemi da risolvere, ripercorrendo, uno dopo l'altro, tutti i passi necessari per costruire le soluzioni, rispettivamente, nella regione esterna $y_1(x) = xe^x$, nella regione, nell'intorno dell'origine (*stato sottile*), $Y_1(X)$ e $\widetilde{y_1}(\tilde{x})$, nella regione interna (secondo *stato sottile*) nell'intorno del punto $x = 1$. Concludendo con la costruzione della soluzione composita all'ordine 1.
- Richiami sul Metodo di Frobenius. Proposto esercizio:

$$(1-x)x^2y'' + (3-5x)xy' + (1-4x)y = 0 \tag{39}$$

  dove scegliamo $I = (0,1)$ e l'incognita è

-
-

$$y: \begin{array}{rcc} (0,1) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(x) \end{array} \tag{40}$$

- Riepilogo delle ipotesi del metodo e del metodo stesso:
  - Soluzione dell'equazione indiciale.
  - Riconoscere il *caso* dell'o.d.e., cio è se $\alpha_1 \neq \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$, o $\alpha_1 = \alpha_2$, o $\alpha_1 \neq \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}$.
  - Determinazione della relazione di ricorrenza.
  - Determinazione di una soluzione $y_1(x)$.
  - Determinazione della seconda soluzione $y_2(x)$ indipendente dalla precedente, utilizzando il metodo di Frobenius.
- La soluzione generale è data da:

$$y(x) = \frac{1}{x(1-x)}[c_1 + c_2 \ln x] \ , \ \ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{41}$$

- Assegnato di verificare il risultato e consegnare l'elaborato insieme agli altri esercizi assegnati sul sito Elearning (scadenza 27 ottobre).

Giovedì 17 ottobre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Metodo delle scale multiple: caso di soluzioni periodiche, cioè equazioni del tipo

$$y'' + \omega^2(\varepsilon t)y = 0 \tag{42}$$

Caso particolare:

- equazione di Mathieu:

$$\begin{cases} y'' + (1 + \varepsilon\delta + \varepsilon\cos(kt))y = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{43}$$

  - Il metodo perturbativo diretto produce soluzioni non limitate, per tempi *lunghi* in analogia con quanto visto nei casi dell'oscillatore debolmente smorzato che delle equazioni di Duffing a del pendolo.
  - Metodo delle scale multiple applicato al problema (50);

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t,\tau)\ \varepsilon^k \ \ , \ \ \tau := \varepsilon t. \tag{44}$$

– Convergenza uniforme e condizione $|y_k(t,\tau)| < M \quad , \quad \forall k$.

– Osservazione sull'operatore

$$\frac{d}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{\partial t} + \varepsilon \frac{d}{\partial \tau}$$

– Costruzione della successione di problemi ottenuti applicando il principio di identità dei polinomi alla serie di potenze in ε.

– Osservazioni sulle condizioni iniziali da imporre ai vari ordini.

– Determinazione di $x(t) \simeq y_0(t,\tau)$ e $y(t) \simeq x_0(t,\tau) + \varepsilon y_1(t,\tau)$.

– Problema all'*ordine zero*:

$$\begin{cases} y_{0\,tt} + y_0 = 0 & , \\ y_0(0,0) \ = 1 & y_{0\,t}(0,0) = 0 \end{cases} \tag{45}$$

– Soluzione della forma

$$y_0(t,\tau) = A(\tau)e^{it} + A^*(\tau)e^{-it} \quad , \quad A \in \mathbb{C}\,, \tag{46}$$

dove A^* indica il complesso coniugato di A. Le condizioni iniziali forniscono delle condizioni sui valori di $A(0)$ e $A^*(0)$.

– Problema all'*ordine uno*:

$$\begin{cases} y_{1\,tt} + y_1 = -2y_{0\,t\tau} - (\delta + \cos(kt))y_0 & , \\ y_1(0,0) \ = 0 & \\ y_{1\,t}(0,0) = -y_{0\,\tau}(0,0) & \end{cases} \tag{47}$$

– Si ottiene la soluzione *limitata* imponendo che il termine noto nell'equazione (**??**) non sia in risonanza con l'operatore differenziale nella stessa equazione. Conviene usare la rappresentazione con esponenziali complessi anche del termine $\cos(kt)$.

Lunedì 21 ottobre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Metodo delle scale multiple: osservazione sul diversa applicazione nel caso di:

1. sistemi *debolmente* dissipativi;
2. sistemi *conservativi*.

Nel primo caso, per esempio oscillatore *debolmente* smorzato $\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + y = 0$, il Metodo delle scale multiple è applicato per tenere conto del comportamento per *tempi lunghi*, come abbiamo visto in lezioni precedenti.
Nel secondo caso, quando si hanno soluzioni periodiche, il Metodo delle scale multiple può essere applicato per *correggere* il periodo ottenuto con il metodo perturbativo diretto. Vediamo un esempio.

• Equazione di Duffing:

$$\begin{cases} \ddot{y} + y - \varepsilon y^3 = 0 & , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 1 & \\ \dot{y}(0) = 0 & \end{cases} \tag{48}$$

Metodo delle scale multiple: caso di soluzioni periodiche.

• Equazioni differenziali ordinarie del tipo:

$$y'' + \omega^2(\varepsilon t)y = 0. \tag{49}$$

– Equazione di Mathieu:

$$\begin{cases} y'' + (1 + \varepsilon\delta + \varepsilon\cos(kt))y = 0 & , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 1 & \\ y'(0) = 0 & \end{cases} \tag{50}$$

⋆ Il metodo perturbativo diretto produce soluzioni non limitate, per tempi *lunghi* in analogia con quanto visto nei casi dell'oscillatore debolmente smorzato che delle equazioni di Duffing a del pendolo.

⋆ Metodo delle scale multiple applicato al problema (50);

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t,\tau)\,\varepsilon^k \quad , \quad \tau := \varepsilon t. \tag{51}$$

⋆ Convergenza uniforme e condizione $|y_k(t,\tau)| < M \quad , \quad \forall k$.

⋆ Osservazione sull'operatore

$$\frac{d}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{\partial t} + \varepsilon \frac{d}{\partial \tau}$$

⋆ Costruzione della successione di problemi ottenuti applicando il principio di identità dei polinomi alla serie di potenze in ε.

⋆ Osservazioni sulle condizioni iniziali da imporre ai vari ordini.

⋆ Determinazione di $x(t) \simeq y_0(t,\tau)$ e $y(t) \simeq x_0(t,\tau) + \varepsilon y_1(t,\tau)$.

⋆ Problema all'*ordine zero*:

$$\begin{cases} y_{0\,tt} + y_0 = 0 & , \\ y_0(0,0) \;= 1 & y_{0\,t}(0,0) = 0 \end{cases} \tag{52}$$

⋆ Soluzione della forma

$$y_0(t,\tau) = A(\tau)e^{it} + A^*(\tau)e^{-it} \quad , \quad A \in \mathbb{C}\,, \tag{53}$$

dove A^* indica il complesso coniugato di A. Le condizioni iniziali forniscono delle condizioni sui valori di $A(0)$ e $A^*(0)$.

⋆ Problema all'*ordine uno*:

$$\begin{cases} y_{1\,tt} + y_1 = -2y_{0\,t\tau} - (\delta + \cos(kt))y_0 & , \\ y_1(0,0) \;= 0 \\ y_{1\,t}(0,0) = -y_{0\,\tau}(0,0) \end{cases} \tag{54}$$

⋆ Si ottiene la soluzione *limitata* imponendo che il termine noto nell'equazione (**??**) non sia in risonanza con l'operatore differenziale nella stessa equazione. Conviene usare la rappresentazione con esponenziali complessi anche del termine $\cos(kt)$.

Mercoledì 23 ottobre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Equazioni a derivate parziali.
- Equazioni lineari a coefficienti costanti.
- Equazione lineare delle onde del I ordine

$$u_t \pm c u_x = 0 \;\; , \;\; c > 0 \tag{55}$$

- Soluzioni del tipo

$$u(x,t) = f(x \mp ct) \quad , \quad f \in C^1 \;\; \text{arbitraria} \tag{56}$$

- Equazione lineare delle onde del II ordine

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \;\; , \;\; c > 0 \tag{57}$$

- Fattorizzazione dell'operatore lineare delle onde:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} \mp c \frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{58}$$

- L'equazione lineare delle onde del II ordine ammette soluzioni del tipo

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct) \quad , \quad F, G \in C^2 \;\; \text{arbitrarie.} \tag{59}$$

- Problema della *corda vibrante*, di lunghezza $L > 0$ con estremi fissi

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) \ = u(L,t) \ = 0 \\ u(x,0) \ = f(x) \\ u_t(x,0) \ = g(x) \end{cases} \tag{60}$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ rappresentano, rispettivamente, la configurazione e l'atto di moto iniziali (per $t = 0$).

- Soluzione del problema mediante il **Metodo di separazione delle variabili** (non finito).
- Determinazione, rispettivamente, della **costante di separazione** e delle autofunzioni

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \ , n \in \mathbb{N} \quad , \quad \phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \phi_n : (0,L) \to \mathbb{R}. \tag{61}$$

Giovedì 24 ottobre 2019*(2 ore - S. Carillo)*

- Metodo di *separazione delle variabili*:
- Problema della *corda vibrante*, di lunghezza $L > 0$ con estremi fissi (conclusione)
  - richiamo di quanto fatto nella lezione precedente.
  - Soluzione dell'equazione

$$\ddot{h}_n + c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 h_n \ \ , n \in \mathbb{N} \tag{62}$$

  - Costruzione di

$$u_n(x,t)^2 = \phi_n(x) h_n(t) \ \ , n \in \mathbb{N} \tag{63}$$

  - Sfruttando la **linearità** dell'equazione delle onde, costruzione della soluzione come combinazione lineare delle u_n

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) h_n(t) \ \ , n \in \mathbb{N} \tag{64}$$

  cioè

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{65}$$

  - Determinazione di $A_n, B_n, n \in \mathbb{N}$ imponendo le condizioni iniziali assegnate:

$$\begin{cases} u(x,0) \ = f(x) \\ u_t(x,0) \ = g(x) \end{cases} \tag{66}$$

  - Verifica che la soluzione ottenuta è della del tipo

$$u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad , \quad F, G \in C^2. \tag{67}$$

- Problema di trasmissione del calore: modello lineare unidimensionale $u : (0,L) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

$$u_t = K u_{xx} \ \ , \ \ K \ \text{ conducibilità termica} \tag{68}$$

  Caso di sbarretta rigida unidimensionale, assegnate le condizioni iniziali

$$u(x,0) = F(x). \tag{69}$$

  che rappresenta la distribuzione della temperatura all'istante iniziale, e le condizioni al contorno;

$$u(0,t) = T_1 \quad , \quad u(L,t) = T_2 \ . \tag{70}$$

  in alternativa, condizioni sul flusso di calore, i.e., per esempio

$$u_x(0,t) = 0 \quad , \quad u(L,t) = T_2 \ . \tag{71}$$

- Condizioni assegnate e metodo di separazione delle variabili: discussione.
- Soluzione dell'equazione del calore **stazionaria**.
- Problema con b.c. non omogenee risolto come sovrapposizione del problema stazionario con b.c. omogenee cui si somma la soluzione del problema dipendente dal tempo con b.c. omogenee.
- Si può applicare tale metodo perchè sussiste il **principio di sovrapposizione delle soluzioni** perchè l'equazione (73) è lineare e, quindi, date due soluzioni, una loro qualunque combinazione lineare è ancora soluzione.

Lunedì 28 ottobre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Problema di trasmissione del calore: modello lineare unidimensionale con incognita

$$u: \quad \begin{array}{rcl} (0,L)\times\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & u(x,t) \end{array} \tag{72}$$

$$u_t = K u_{xx} \quad , \quad K \ \text{ conducibilità termica} \tag{73}$$

  Caso di sbarretta rigida unidimensionale, assegnate le condizioni iniziali

$$u(x,0) = F(x). \tag{74}$$

  che rappresenta la distribuzione della temperatura all'istante iniziale, e le condizioni al contorno;

$$u(0,t) = T_1 \quad , \quad u(L,t) = T_2 \ . \tag{75}$$

- Condizioni assegnate e metodo di separazione delle variabili: discussione.
- Soluzione dell'equazione del calore **stazionaria**.
- Problema con b.c. non omogenee risolto come sovrapposizione del problema stazionario con b.c. omogenee cui si somma la soluzione del problema dipendente dal tempo con b.c. omogenee.
- Si può applicare tale metodo perchè sussiste il **principio di sovrapposizione delle soluzioni** perchè l'equazione (73) è lineare e, quindi, date due soluzioni, una loro qualunque combinazione lineare è ancora soluzione.

Mercoledì 30 ottobre 2019*(2 ore - S. Carillo)*

Problema di trasmissione del calore

- Caso di sbarretta rigida unidimensionale circolare, assegnate le condizioni iniziali

$$u(x,0) = F(x). \tag{76}$$

  che rappresenta la distribuzione della temperatura all'istante iniziale.
- Trasmissione del calore in un anello circolare.
- Condizioni al contorno periodiche:

$$u(-L,t) = u(L,t) \quad , \quad u_x(-L,t) = u_x(L,t) \ . \tag{77}$$

- Studio del problema con il metodo di separazione delle variabili. (non finito)

Lunedì 4 novembre 2019 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Metodo di separazione delle variabili: motivazione.
- Problema del calore stazionario: lamina rettangolare con assegnate b.c..
- Condizioni di flusso assegnato al bordo.
- metodo di separazione delle variabili e sovrapposizione delle soluzioni: soluzione come somma di 4 problemi nei quali, a turno su di un solo lato sono assegnate b.c. non omogenee.

Giovedì 7 novembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Problema di trasmissione del calore sul rettangolo:

$$u_t - k(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \ , \ \ u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \tag{78}$$

- Condizioni al contorno e condizione iniziale.
- Introduzione al metodo di separazione delle variabili.
- Metodo di separazione delle variabili e condizioni al contorno non omogenee.
- Decomposizione del problema in:
  - Problema stazionario che verifica le condizioni assegnate.
  - Problema di evoluzione con condizioni al contorno omogenee.
  - costruzione della soluzione del problema assegnato utilizzando la **linearità** dell'equazione (78).
- Studio del problema stazionario: equazione di Laplace sul rettangolo

$$w_{xx} + w_{yy} = 0 \ , \ \ w|_{\partial\Omega} \text{ assegnata.} \quad w : \Omega \to \mathbb{R}. \tag{79}$$

- Risoluzione del problema stazionario come sovrapposizione delle soluzioni di 4 problemi nei quali, rispettivamente si hanno dati omogenei su tre lati e, ad uno solo sono imposte le condizioni al contorno non omogenee assegnate.
- Costruzione della soluzione del problema non stazionario come combinazione lineare della soluzione del problema stazionario con le assegnate condizioni al contorno, cui va sommata la soluzione del problema dipendente dal tempo in le condizioni al contorno sono omogenee.
- N.B. La condizione iniziale va modificata tenendo conto non solo del dato assegnato, ma anche della soluzione stazionarie trovata.

Lunedì 11 novembre 2020 *(2 ore - S. Carillo)*

Problema di Laplace stazionario sul cerchio di centro l'origine e raggio $a > 0$.

$$\Delta u = 0 u|_{\partial\Omega} \text{assegnata}, \tag{80}$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < a^2\}$ e $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Cambio di coordinate da cartesiane a polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \quad (\rho,\theta) \in U = (0,a) \times (-\pi,\pi) \end{cases} \tag{81}$$

- Osservazioni sulla corrispondenza tra punti di Ω e punti di U:
  -
  $$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = a^2\}$$

  mentre

  $$\partial U = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i \quad \text{dove} \quad \gamma_1 = (0,a) \times \{-\pi\}, \quad \gamma_2 = \{a\} \times (-\pi,\pi), \quad \gamma_3 = (0,a) \times \{\pi\}, \quad \gamma_4 = \{0\} \times (-\pi,\pi)$$

  - N.B.: la frontiera di Ω corrisponde al segmento γ_2.
  - Condizioni da imporre su $\partial\Omega$: codizioni *periodiche* su γ_1 and γ_3.
  - Il segmento γ_4 corrisponde all'origine nel piano x, y.
- operatore di Laplace in coordinate polari:

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{82}$$

- Soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ \phi|_{\partial U} \quad \text{assegnata} \end{cases} \tag{83}$$

  mediante il metodo di separazione delle variabili.

Mercoledì 13 novembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Problema del calore sul cerchio

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 lea^2\}$$

$$\begin{cases} u_t = K\left(u_{xx} + u_{yy}\right), \\ u|_{\partial\Omega} \quad \text{assegnata} \\ u(x,y,t)|_{t=0} = \tilde{F}(x,y) \end{cases} \tag{84}$$

Metodo di soluzione (basato sulla linearità del problema) la soluzione. Cerchiamo la soluzione di (84) come somma della soluzione w del problema stazionario che verifica le condizioni al contorno assegnate, $u(x,y,t) = w(x,y) + v(x,y,t)$ dove:

$$\mathcal{P}_1 \begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, \quad \text{equazione stazionaria} \\ w|_{\partial\Omega} \quad \text{assegnata} \end{cases} \tag{85}$$

e del problema non stazionario con condizioni al contorno omogenee

$$\mathcal{P}_2 \begin{cases} v_t = K\left(v_{xx} + v_{yy}\right), & \text{equazione non stazionaria} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{b.c. omogenee} \\ u(x,y,t)|_{t=0} = F(x,y) & \text{dove} \quad F(x,y) = \tilde{F}(x,y) - w(x,y) \end{cases} \tag{86}$$

Soluzione del problema $\mathcal{P}_2$ non stazionario mediante il metodo di separazione delle variabili.

Giovedì 14 novembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Continuazione della lezione precedente. Studio della parte radiale del problema

$$\nabla w + \mu w = 0 \tag{87}$$

dove

- la funzione incognita è $w : \Omega \subset R^2 \to \mathbb{R}$,
- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < a^2\}$, dove a è il raggio del cerchio $\Omega \subset R^2$,
- le b.c. $w|_{\partial\Omega}$ sono assegnate ed indipendenti dal tempo.

Utilizzando le coordinate polari, $w(x, y) \to v(\rho, \theta)$, dove $v : (0, a) \times (-\pi, \pi) \subset R^2 \to \mathbb{R}$. Quindi, si applica il metodo di separazione delle variabili ponendo $v(\rho, \theta) = \phi(\rho)\psi(\theta)$. Si ottiene il problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \psi'' + \lambda\psi = 0 \\ \psi(-\pi) = \psi(\pi) \\ \psi'(-\pi) = \psi'(\pi) \end{cases} \tag{88}$$

Gli autovalori e le relative autofunzioni sono:

$$\lambda_n = n^2 \ \ , n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \uplus \{0\} \ \ , \ \ \psi_{1,n} = \cos(n\theta) \ \ , \ \ \psi_{2,n} = \sin(n\theta) \tag{89}$$

Per quanto riguarda la parte radiale, posto $z := \sqrt{\mu}\rho$ e chiamando f la nuova incognita, si ottiene l'equazione di Bessel studiata applicando il metodo di Frobenius.

- Equazione di Bessel
$$x^2 f'' + x f' + (x^2 - n^2) f = 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{90}$$
e sua soluzione per $n \geq 0$.
- caso $n = 0$.
- Caso $n > 0$ soluzione mediante il metodo di Frobenius.
- Funzioni de Bessel di I e II specie.

Lunedì 18 novembre 2019 *(4 ore - S. Carillo)*

Problema del calore non stazionario con condizioni al contorno omogenee sul cerchio. Soluzione mediante il metodo di separazione delle variabili.

- Soluzione mediante il metodo di separazione delle variabili. Ricordando la
- condizione $\lim_{\to 0} |f(x)| < \infty$. solo le funzioni de Bessel di I specie sono autofunzioni del problema.
- determinazione dei corrispondenti autovalori.
- Costruzione della soluzione del problema di trasmissione del calore nel caso di piastra circolare con condizioni al contorno omogenee.
- introduzione all'uso del *Toolbox di calcolo simbolico* di MatLab con esempi.

Mercoledì 20 novembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Problemi in tre dimensioni, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \ \ , \ \ u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \tag{91}$$

  dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < a^2\}$. Metodo di risoluzione. Ricordando la soluzione dell'equazione di Laplace (casi Ω cerchio aperto).

- Equazione di Laplace su $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x < L, 0 < y < H, 0 < z < S\}$.

Giovedì 21 novembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Equaziomne delle onde , $\subset \mathbb{R}^3$

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0 \tag{92}$$

  dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$ Metodo di risoluzione. Equazione di Laplace (casi intervallo aperto e sfera).

- Metodo di separazione delle variabili (polinomi di Legendre).

Giovedì 21 novembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Studio del problema delle onde in $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$, cioè

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0 \ \ , \ \ u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \, . \tag{93}$$

dove

Lunedì 25 novembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Fine Equazione di Laplace (sfera).
- Problema di Robin su settore circolare.

Mercoledì 27 novembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Equazione di Van der Pol (non lineare).

$$+\varepsilon(x^2 - 1) + x = 0 \ \ , \ \ x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \ \ 0 < \varepsilon << 1 \tag{94}$$

con i.c. $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$

Gioledì 28 novembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Ancora equazione di Van der Pol (non lineare).

$$+\varepsilon(x^2-1)+x=0 \ \ , \ \ x:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \ \ 0<\varepsilon<<1 \tag{95}$$

con i.c. $x(0)=1$ e $\dot{x}(0)=0$
Referenza Hinch Perturbation Methods(1995).

Lunedì 2 dicembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Metodo delle scale multiple nel caso di equazioni differenziali ordinarie che ammettono soluzioni periodiche: esempio equazione di Van der Pol.

Mercoledì 4 dicembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Cenni allo studio di p.d.es nonlineari.

- Equazione di Burgers (non lineare).

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x \ \ , \ \ v:\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,. \tag{96}$$

- Linearizzazione mediante la trasformazione di Cole-Hopf $\frac{v=u_x}{uEquazionediKorteweg-deVries: u_t+u_{xxx}+6uu_x=0 \ \ , \ \ u:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,.(97)}$
- Ricerca di soluzioni tipo *onda* i.e. $u(x,t)=f(x-ct)$
Ricerca di soluzioni *piccole* per le equazioni nonlineari viste i.e. $u(x,t)=\varepsilon w(x,t)$.

Gioledì 5 dicembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Equazione differenziale ordinaria non lineare:

$$y'' + \omega^2(\varepsilon t)y = 0 \ \ , \ \ x:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \ \ 0<\varepsilon<<1 \tag{98}$$

con i.c. $y(0)=a$ e $y'(0)=0$.
Risoluzione con il metodo delle scale multiple.

Lunedì 9 dicembre 2019 *(3 ore - S. Carillo)*

Spiegazioni in. Aula e suggerimenti agli studenti per lo sviluppo dellelaborato personale.

Mercoledì 11 dicembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Spiegazioni in. Aula e suggerimenti agli studenti per lo sviluppo dellelaborato personale.

Giovedì 12 dicembre 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Metodo delle caratteristiche: esposizione da parte di due studenti.
- Suggerimenti e domande studenti relativamente ai temi da trattare in elaborati personali da parte degli studenti.
