Ing. energetica, 2013-14, soluzioni

11/2/2015

Esercizio 1

Sia data la funzione $f(x,y) = x^4y^2 + xy - y$.

Studiare i punti critici di f e trovarne massimo e minimo globale, o eventualmente estremo superiore ed inferiore, nel suo dominio e nell'insieme $D = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (1,4), \big| y| < 1/x \big\}$.

Soluzione

Dato che $\lim_{y\to\pm\infty} f(0,y) = -\lim_{y\to\pm\infty} y = \mp\infty$, f è illimitata. Quindi non ha massimo né minimo globale, e gli estremi superiore ed inferiore su $\mathbb{R}$ valgono rispettivamente $+\infty$, e $-\infty$.

Il gradiente di f è uguale a

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) =&(4x^3y^2 + y, 2x^4y + x - 1),\\ =&(y(4x^3y + 1), 2x^4y + x - 1),\end{aligned}$$

e si avranno punti critici in corrispondenza delle soluzioni dei sistemi (dato che non esistono punti critici per $x = 0$)

$$\begin{cases} y = 0, \\ 2x^4y + x - 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{1}{4x^3}, \\ 2x^4y + x - 1 = 0, \end{cases}$$

ovvero nei punti

$$P = (1,0), \qquad Q = (2, -2^{-5}).$$

Per studiare la natura di questi punti, calcoliamo l'hessiano di f, che risulta essere pari a

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2y^2 & 8x^3y + 1 \\ 8x^3y + 1 & 2x^4 \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$\det(\mathrm{H}\, f(P)) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 < 0,$$

$$\det(\mathrm{H}\, f(Q)) = \det \begin{pmatrix} 3 * 2^{-6} & -1 \\ -1 & 2^5 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} > 0, \qquad \mathrm{Tr}(\mathrm{H}\, f(Q)) > 0,$$

da cui P punto di sella e Q punto di minimo relativo.

Essendo D un insieme aperto e limitato ed f una funzione continua, questa avrà in $\overline{D}$ massimo e minimo globale. Se questi valori saranno assunti in D, saranno i massimi e minimi cercati, se invece saranno assunti in ∂D saranno solamente estremo superiore e/o inferiore.

Per studiare ∂D, usiamo la parametrizzazione data curve

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t) = (t, 1/t), && t \in [1,4],\\
&\gamma_2(t) = (4, t), && t \in [-1/4, 1/4],\\
&\gamma_3(t) = (t, -1/t), && t \in [1,4],\\
&\gamma_4(t) = (1, t), && t \in [-1,1].
\end{aligned}$$

Su di esse f vale

$$\begin{aligned}
f \circ \gamma_1(t) &= t^2 + 1 - 1/t,\\
f \circ \gamma_2(t) &= 2^8 t^2 + 3t,\\
f \circ \gamma_3(t) &= t^2 - 1 + 1/t,\\
f \circ \gamma_4(t) &= t^2.
\end{aligned}$$

Derivando queste funzioni si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{d(f \circ \gamma_1)}{dt}(t) &= 2t + \frac{1}{t^2},\\
\frac{d(f \circ \gamma_2)}{dt}(t) &= 2^9 t + 3,\\
\frac{d(f \circ \gamma_3)}{dt}(t) &= 2t - \frac{1}{t^2},\\
\frac{d(f \circ \gamma_4)}{dt}(t) &= 2t,
\end{aligned}$$

da cui si ottengono punti di estremo vincolato $P = (1,0)$ e $R = \left(-2^{-1/3}, 2^{1/3}\right)$. Confrontando i valori che la funzione assume in questi punti, nel punto di minimo relativo Q e nei punti $(1, \pm 1), (4, \pm 1/4)$, otteniamo i valori $67/4$ e $-2^{-2/3}$ rispettivamente come estremo superiore ed inferiore (in quanto assunti in ∂D).

Esercizio 2

Rappresentare in serie di Fourier, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica, di periodo $T = 2\pi$ individuata in $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = \sin(x/2)$. Studiare inoltre la convergenza della serie.

Soluzione

La serie cercata sarà data da

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n_0}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

con $a_n = 0$, essendo f dispari, e

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx \\
=& \frac{1}{\pi}\left[-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + 2n\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,dx\right] \\
=& \frac{1}{\pi}\left[4n\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + 4n^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx\right] \\
=& \frac{8n(-1)^n}{\pi} + 4n^2 b_n,
\end{aligned}$$

Quindi

$$b_n = \frac{8n(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}.$$

La serie di Fourier calcolata converge puntualmente ad f per $x \neq k\pi$, e converge a $(f(k\pi^+) + f(k\pi^-))/2 = 0$ e per $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dato che f non è continua, la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$, ma solamente negli intervalli chiusi e limitati non contenenti i punti $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 3

Data la forma differenziale, per $\alpha > 0$,

$$\omega = \left(\frac{2x^{\alpha+1} + 2xy^\alpha - y}{x^\alpha + y^\alpha}\right)dx + \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha + x}{x^\alpha + y^\alpha}\right)dy.$$

determinarne l'insieme di definizione, calcolare il valore di α per il quale ω sia chiusa, ed usare tale valore nel resto dell'esercizio. Indicare un insieme aperto e connesso in cui ω sia esatta e calcolarne la primitiva F tale che $F(1,1) = \pi/4+2$.

Pararametrizzarne la frontiera dell'insieme $D = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge \left| y \right| \,\right\}$ delimitata dalle circonferenze di raggio 1 e 2. Calcolare l'integrale di ω lungo ∂D senza ulteriori calcoli, e verificare il risultato ottenuto usando le formule di Gauss-Green.

Sia γ una delle due porzioni in cui ∂D risulta divisa dai punti $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $Q = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Calcolare direttamente l'integrale di ω da P a Q lungo γ e verificare il risultato facendo uso della funzione F.

Soluzione

La forma differenziale è definita in $\left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^\alpha, y^\alpha \text{ ben definiti}, x^\alpha + y^\alpha \neq 0 \,\right\}$.

Perché ω sia chiusa, deve valere

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{2x^{\alpha+1} + 2xy^\alpha - y}{x^\alpha + y^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^\alpha + y^\alpha} + 2x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^\alpha + y^\alpha + x}{x^\alpha + y^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^\alpha + y^\alpha} + 1,$$

ovvero

$$\frac{-x^\alpha + (\alpha-1)y^\alpha}{(x^\alpha+y^\alpha)^2} = \frac{(1-\alpha)x^\alpha + y^\alpha}{(x^\alpha+y^\alpha)^2},$$

perciò si dovrà avere $\alpha = 2$.

Quindi, per tale valore di α, ω sarà esatta in ogni sottoinsieme semplicemente aperto connesso del suo dominio $\mathbb{R}\setminus\{\,(0,0)\,\}$, come ad esempio l'insieme $\mathbb{R}\setminus\{\,(x,0),\,|\,x\in(-\infty,0]\,\}$.

Per trovare la primitiva di ω, dato che $x \neq 0$ e

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} + 1,$$

si ha

$$F(x,y) = \int \left(\frac{x}{x^2+y^2} + 1\right) dy = \int \frac{1}{x}\frac{dy}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1} + y = \arctan\frac{y}{x} + y + \varphi(x).$$

Dato che

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} + \varphi'(x) = -\frac{y}{x^2+y^2} + 2x,$$

si ha

$$\varphi(x) = c \qquad \Rightarrow \qquad F(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + x^2 + y + c.$$

Imponendo la condizione data, si ottiene il valore da assegnare a c, ovvero

$$F(1,1) = c + \pi/4 + 2 = \pi/4 + 2 \qquad \Rightarrow \qquad F(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + x^2 + y.$$

La frontiera di D è costituita da quattro curve $\gamma_{1,\ldots,4}$, quindi una sua parametrizzazione (antioraria) può essere data dalle funzioni

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) =& (-t,-t), && t\in[-\sqrt{2},-\sqrt{2}/2],\\
\lambda_2(t) =& (\cos t,-\sin t) && t\in[-\pi/4,\pi/4],\\
\lambda_3(t) =& (t,-t), && t\in[-\sqrt{2},-\sqrt{2}/2],\\
\lambda_4(t) =& (2\cos t, 2\sin t) && t\in[-\pi/4,\pi/4].
\end{aligned}$$

L'insieme $\overline{D}$ è contenuto in un insieme in cui ω è esatta, quindi si può dire immediatamente che l'integrale lungo la sua frontiera è nullo. Infatti il calcolo esplicito dà

$$\int_{\gamma_1}\omega = \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-\frac{t}{2t^2} + 2t + \frac{t}{2t^2} + 1\right) dt = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2}\omega =& \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [-\sin t(\sin t + 2\cos t) - \cos t(\cos t + 1)]dt\\
=& \big[\cos^2 t - \sin t - t\big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2} - \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{t}{2t^2} + 2t - \frac{t}{2t^2} - 1 \right) dt = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_4} \omega &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[-2 \sin t \left(\frac{1}{2} \sin t + 4 \cos t \right) + 2 \cos t \left(\frac{1}{2} \cos t + 1 \right) \right] dt \\ &= \left[4 \cos^2 t + 2 \sin t + t \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} + \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\partial D} \omega = \sum_i \int_{\gamma_i} \omega = 0.$$

Applicando le formule di Gauss-Green, dato che ω è chiusa, si ha

$$\int_{\partial D^+} \omega = \int_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + 1 \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} + 2x \right) \right] dx\, dy = \int_D 0\, dx\, dy = 0$$

Poniamo ora $\gamma = \gamma_3 \cup \gamma_4$. Avremo quindi

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_4} \omega = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Dato che ω è esatta, lo stesso risultato si avrà con

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega =& F\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) - F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ =& \arctan 1 + 2 + \sqrt{2} - \arctan(-1) - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$