Ing. energetica, 2013-14, soluzioni

1/4/2015

Esercizio 1

Sia data la funzione
$$f(x,y) = \sin y\, e^{\cos x}.$$

Studiare i punti critici di f e trovarne massimo e minimo globale, o eventualmente estremo superiore ed inferiore, nel suo dominio ed all'interno dell'insieme

$$D = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq \arccos y,\ y \in [0,1]\}.$$

Soluzione

Dato che $-e \leq \sin y\, e^{\cos x} \leq e$, e $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = e$, $f\left(0, -\frac{\pi}{2}\right) = -e \implies \boxed{f(E) = [-e, e]}$.

Infatti, f é limitata ed ha massimo e minimo globale su $\mathbb{R}$ che valgono, rispettivamente, e, e $-e$. Il gradiente di f è uguale a

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) =&(-\sin x \sin y\, e^{\cos x}, \cos y\, e^{\cos x}),\\ =&e^{\cos x}(-\sin x \sin y, \cos y),\end{aligned}$$

e i punti critici sono individuati dalla condizione $\nabla f = 0$, cioè:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = 0, \\ \cos y = 0. \end{cases}$$

I punti critici sono

$$\boxed{P_{h,k} = \left(h\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), \qquad \forall h,k \in \mathbb{Z}}.$$

L'hessiano di f, è

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin y\, e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x) & -\sin x \cos y\, e^{\cos x} \\ -\sin x \cos y\, e^{\cos x} & -\sin y\, e^{\cos x} \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$\det(\mathrm{H}\, f(P_{h,k})) = \det \begin{pmatrix} (-1)^{h+k+1} e^{(-1)^h} & 0 \\ 0 & (-1)^{k+1} e^{-1^h} \end{pmatrix} = (-1)^h e^{2(-1)^h}.$$

Studiando il segno di questo determinante e di $\partial^2 f/\partial y^2$, si ottiene che:

$\boxed{P_{2n+1,k}, \forall n, k \in \mathbb{Z}}$ sono **punti di sella**

$\boxed{P_{2n,2m+1}, \forall n, m \in \mathbb{Z}}$ sono **punti di minimo**

$\boxed{P_{2n+1,2m}, \forall n, m \in \mathbb{Z}}$ sono **punti di massimo**

Essendo D un insieme chiuso e limitato ed $f \in C^0(D) \Longrightarrow \boxed{f(D) = [m_D, M_D]}$.

Nessuno dei punti critici è interno a D, quindi il massimo ed il minimo sono assunti da f sulla frontiera ∂D.

Per studiare ∂D, usiamo la parametrizzazione data curve

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t) = (0, t), && t \in [0, 1],\\
&\gamma_2(t) = (t, 0), && t \in [0, \pi/2],\\
&\gamma_3(t) = (\arccos t, t), && t \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Su di esse f vale

$$\begin{aligned}
f \circ \gamma_1(t) &= e \sin t,\\
f \circ \gamma_2(t) &= 0,\\
f \circ \gamma_3(t) &= e^t \sin t.
\end{aligned}$$

Derivando queste funzioni si ottiene

$$\begin{aligned}
&\frac{d(f \circ \gamma_1)}{dt}(t) = e \cos t > 0 \quad \forall t \in [0, 1],\\
&\frac{d(f \circ \gamma_2)}{dt}(t) = 0,\\
&\frac{d(f \circ \gamma_3)}{dt}(t) = e^t(\sin t + \cos t) > 0 \quad \forall t \in [0, 1],
\end{aligned}$$

da cui segue che i punti di estremo vincolato sono tutti e soli quelli appartenenti a γ_2. Confrontando i valori che la funzione assume in questi punti, e nei punti $(0, 0), (0, 1), (\pi/2, 0)$, otteniamo i valori $m = 0$ e $M = e \sin 1$ rispettivamente come minimo e massimo.

Esercizio 2

Rappresentare in serie di Fourier, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 2\pi$ definita da:

$$f(x) = \left|\sin \frac{x}{2}\right| \quad , \quad x \in [-\pi, \pi).$$

Precisare, $\forall x \in [-\pi, \pi)$ il valore della somma di tale serie di Fourier. In tale intervallo la convergenza è uniforme ? E in $\mathbb{R}$? Perchè ? **Fornire adeguate motivazioni**.

Soluzione

La funzione è periodica e di periodo 2π, quindi la serie cercata sarà data da

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big), \tag{1}$$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$,dove $b_n = 0$, essendo f pari, e

$$\begin{aligned}
a_0 =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\,dx \\
=& -\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}. \\
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,dx \\
=& \frac{2}{\pi}\left[-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\Big|_0^{\pi} - 2n\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx\right] \\
=& \frac{2}{\pi}\left[2 - 4n\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\Big|_0^{\pi} + 4n^2\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx\right] \\
=& \frac{4}{\pi} + 4n^2 a_n.
\end{aligned}$$

Quindi

$$a_n = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos(nx)$$

converge totalmente. Dim:

1. la condizione $|\varphi_n(x)| \leq \Lambda_n$ è verificata con $\frac{\Lambda_n = 1}{n^2}$, infatti, notando che $4n^2 - 1 \geq 3n^2, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos(nx)\right| \leq \frac{4}{3\pi n^2} \leq \frac{1}{n^2}\ , \quad \forall n \geq 1$$

2. la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge.

Risultato noto *a priori* poichè la serie di Fourier (1) rappresenta una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 3

Data la forma differenziale

$$\omega = \left(y - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx + \left(x - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dy,$$

1. determinare l'insieme di definizione $E \subset \mathbb{R}^2$.
2. Studiare la chiusura e l'esattezza di ω nel suo dominio. In caso ω non sia esatta in tutto il suo dominio, trovarne un sottoinsieme in cui ω sia esatta.
3. Calcolare, dove ω è esatta, la primitiva F di ω che si annulla in $(0,1)$.
4. Dato l'aperto $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1,\ x,y<0\right\}$, pararametrizzarne la frontiera ∂D;
5. Calcolare direttamente (ovvero usando la definizione)

$$I = \int_{\partial D^+} \omega.$$

6. Controllare se per il calcolo dell'integrale del punto precedente si possano utilizzare le formule di Gauss-Green. Verificarlo con il calcolo dell'integrale doppio.

Soluzione

La forma differenziale è ben definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$, e chiusa, dato che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(y - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) =& 1 + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) =& 1 + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Dato che il dominio di ω non è semplicemente connesso, per sapere se la forma è esatta in esso dovremmo calcolarne un integrale intorno al suo "buco".

Scegliamo come percorso di integrazione la circonferenza unitaria centrata nell'origine $\mathcal{C}$, ovvero, passando in coordinate polari $(x,y) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \omega &= \int_0^{2\pi} \big[-(\sin\vartheta - \cos\vartheta)\sin\vartheta + (\cos\vartheta - \sin\vartheta)\cos\vartheta \big] d\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) d\vartheta = \int_0^{2\pi} (2\cos^2\vartheta - 1) d\vartheta = 0.
\end{aligned}$$

Quindi ω è esatta in nel suo dominio.

Per trovare la primitiva di ω, dato che

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

si ha

$$F(x,y) = \int \left(y - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx = xy + \sqrt{x^2+y^2} + \varphi(y).$$

Quindi, essendo

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi'(x) = x - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

si ha

$$\varphi(x) = c \qquad \Rightarrow \qquad F(x,y) = xy + \sqrt{x^2+y^2} + c.$$

Imponendo la condizione data, si ottiene il valore da assegnare a c, ovvero

$$F(0,1) = c + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F(x,y) = xy + \sqrt{x^2+y^2} - 1.$$

La frontiera di D è $\partial D = \cup \gamma_k, k = 1,2,3,4$, quindi una sua parametrizzazione antioraria può essere data dalle funzioni

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) =& (0,t), && t \in [-2,-1], \\
-\gamma_2(t) =& (\cos t, \sin t) && t \in [\pi, 3/2\pi]. \\
\gamma_3(t) =& (-t, 0), && t \in [1,2], \\
\gamma_4(t) =& 2(\cos t, \sin t) && t \in [\pi, 3/2\pi].
\end{aligned}$$

Quindi possiamo calcolare l'integrale di ω su ∂D^+ sommando gli integrali sulle curve γ_k, ottenendo

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \omega &= \int_{-2}^{-1} -\frac{t}{|t|} dt = 1, \\
\int_{\gamma_2} \omega &= \int_{1}^{2} -\frac{t}{|t|} dt = -1, \\
\int_{\gamma_2} \omega &= \int_{\pi}^{3/2\,\pi} \big[-(\sin t - \cos t)\sin t + (\cos t - \sin t)\cos t \big] dt, \\
&= \int_{\pi}^{3/2\,\pi} (2\cos^2 t - 1)\, dt = 0 = \int_{\gamma_4} \omega,
\end{aligned}$$

quindi $\int_{\partial D^+} \omega = 0$; N.B. lo stesso risultato si ottiene utilizzando le formule di Green e costituisce una verifica dell'esattezza già dimostrata.