Analisi Matematica II, Ing. Aerospaziale (Canale A-K)
Silvia Marconi - 26 Aprile 2012 -

◇ EDO di Eulero

- $\begin{cases} x^2y'' - xy' + y = 2x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$ $\qquad [y(x) = x \ln x(1 + \ln x), \quad x > 0].$

- $\begin{cases} y'' + \frac{4}{x}y' = \frac{4}{x^4} \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -5 \end{cases}$ $\qquad [y(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} + 1, \quad x > 0].$

  (Si può risolvere con il metodo della riduzione dell'ordine, oppure, moltiplicando per x^2, si risolve come equazione di Eulero).

◇ Funzioni implicite

$ax + by + c = 0$ retta in forma implicita;
$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ e $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$ retta in forma esplicita.

Insieme degli zeri di una funzione $F(x, y)$ in due variabili:

$$Z_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; F(x, y) = 0\}.$$

Questione dell'esplicitazione di y in funzione di x e di x in funzione di y.

Esempio: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

$$Z_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

$$f : [-1, 1] \to [0, 1], \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad f(x_0) = y_0 \quad F(x, f(x)) = 0$$

$$g : [-1, 1] \to [0, 1], \quad g(y) = \sqrt{1 - y^2} \quad g(y_0) = x_0 \quad F(g(y), y) = 0$$

nell'intorno di un punto (x_0, y_0) di Z_F nel primo quadrante.
Caso del punto $A(0, 1)$.

- **Teorema del Dini**
  Dimostrazione dell'esistenza e unicità della funzione esplicita.

- **Teorema di derivazione di funzioni implicite**
  (con $F \in C^1(A)$ e in generale $F \in C^k(A)$).
  Dimostrazione della formula per $f'(x)$ e per $f''(x)$.

- Applicazione del teorema di derivazione delle funzioni implicite al caso di un punto stazionario di f.