Analisi Matematica II, Ing. Aerospaziale (Canale A-K)
Silvia Marconi - 09 Maggio 2012 -

◇ Funzioni implicite

Applicazione del teorema del Dini a $x^2+y^2-1=0$.
$\vec{\nabla}F(x,y) = (2x,2y)$. In un punto (x_0,y_0) nel primo quadrante $\vec{\nabla}F(x_0,y_0) = (2x_0,2y_0) \neq (0,0)$ allora per il teorema del Dini esistono le funzioni implicite

$$f:[-1,1]\to[0,1], \quad f(x)=\sqrt{1-x^2} \quad f(x_0)=y_0 \quad F(x,f(x))=0$$

$$g:[-1,1]\to[0,1], \quad g(y)=\sqrt{1-y^2} \quad g(y_0)=x_0 \quad F(g(y),y)=0$$

Caso del punto $A(0,1)$: $\vec{\nabla}F(0,1)=(0,2)$ allora per Dini esiste la funzione implicita $y=f(x)$ tale che $f(0)=1$ e $F(x,f(x))=0$ in un intorno di 0 (è la f scritta in precedenza).

- **Punto regolare e punto singolare**
- **Osservazione:** il teorema del Dini dà solo condizioni sufficienti per l'esistenza delle funzioni implicite.
  - $x^2-y^2=0$ non è grafico di una funzione nell'intorno del punto singolare $O(0,0)$;
  - $(x-y)^2=0$ è grafico sia di una funzione di x che di una funzione di y nell'intorno di ogni suo punto singolare $P(x,x)$.
- **Retta tangente**
  Equazione della retta tangente a $F(x,y)=0$ in un suo punto regolare (x_0,y_0).
- **Conseguenza:** Il gradiente di F è perpendicolare alla retta tangente a $F(x,y)=0$ in un suo punto regolare (x_0,y_0).
- **Curve di livello** $F(x,y)=c$.
- **Esempi:**
  - $F(x,y)=e^x-3x^2y-\sin(x+y)-1$
    Verificare che $F(x,y)=0$ definisce implicitamente una funzione di una variabile rispetto all'altra in un intorno di $O(0,0)$.
    Studiare la natura del punto $O(0,0)$ per la funzione implicita.
    [Esiste la funzione implicita $f(x)$; O è punto di minimo per f.]
  - $F(x,y)=[(y-1)^2+x^2][(y+1)^2+x^2]$
    Verificare che $F(x,y)=4$ definisce implicitamente una funzione di una variabile rispetto all'altra in un intorno di $Q(1,0)$.
    Studiare la natura del punto Q per la funzione implicita.
    Approssimare la funzione implicita coni il polinomio di Taylor al quarto ordine.
    Costruire esplicitamente la funzione implicita.
    [Esiste la funzione implicita $g(y)$; Q è punto di massimo per g; $g(y) = 1-\frac{1}{8}y^4+o(y^4)$; $g:[-\sqrt{3},\sqrt{3}]\to[0,1]$, $g(y)=\sqrt{-(1+y^2)+2\sqrt{1+y^2}}$.]