# Analisi Matematica II, Ing. Aerospaziale (Canale A-K) Silvia Marconi - 10 Maggio 2012 -

## ◇ Funzioni implicite in $\mathbb{R}^3$

- **Insieme degli zeri** di una funzione $F(x, y, z)$ in tre variabili:

$$Z_F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ F(x, y, z) = 0\}.$$

- Questione dell'esplicitazione di $z$ in funzione di $x$ e $y$, di $y$ in funzione di $x$ e $z$ e di $x$ in funzione di $y$ e $z$.
- **Superfici di livello** $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ F(x, y, z) = c\}, \ c \in \mathbb{R}$.
- **Teorema del Dini in** $\mathbb{R}^3$ (senza dim.).
- **Teorema di derivazione di funzioni implicite in** $\mathbb{R}^3$ (con $F \in C^1(A)$).
- **Piano tangente** a $F(x, y, z) = 0$ in un punto regolare $P_0(x_0, y_0, z_0)$.
- **Conseguenza:** Il gradiente $\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0)$ è perpendicolare al piano tangente alla superficie $F(x, y, z) = 0$ in un suo punto regolare $(x_0, y_0, z_0)$. In generale il gradiente è perpendicolare al piano tangente alle superfici di livello in un punto regolare.

**Esempio:** $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

$$Z_F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

$$f : \mathcal{C}^{x,y}_{O,1} \to [0, 1], \quad f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad f(x_0, y_0) = z_0 \quad F(x, y, f(x, y)) = 0$$

$$g : \mathcal{C}^{x,z}_{O,1} \to [0, 1], \quad g(x, z) = \sqrt{1 - x^2 - z^2} \quad g(x_0, z_0) = y_0 \quad F(x, g(x, z), z) = 0$$

$$h : \mathcal{C}^{y,z}_{O,1} \to [0, 1], \quad h(y, z) = \sqrt{1 - y^2 - z^2} \quad g(y_0, z_0) = x_0 \quad F(h(x, y), y, z) = 0$$

nell'intorno di un punto $(x_0, y_0, z_0)$ di $Z_F$ nel primo ottante.
Caso del punto $A(0, 0, 1)$.

**Esercizi:**

- $F(x, y, z) = x^3 - x^2 y + 2xyz - y^2 \sin z + z^2 \cos y$.
  Stabilire se $F(x, y, z) = 0$ è grafico di una finzione in due variabili in un intorno del punto $P_0(1, 1, 0)$ e determinare il piano tangente in $P_0$.
  [$F(x, y, z) = 0$ è esplicitabile rispetto a tutte le variabili. $\pi : x - y + z = 0$].

- $F(x,y,z) = e^x + f(3x+y) + e^z - 1$, con $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
    - Determinare condizioni sufficienti su $f$ affinché $F(x,y,z) = 0$ definisca implicitamente una superficie di equazione $y = g(x,z)$ intorno a $O(0,0,0)$.
    - Verificare che la funzione $f(t) = \sin t - 1$ soddisfa tali condizioni e con tale scelta di $f$ determinare il piano tangente e il versore normale a $F(x,y,z) = 0$ in $O$.

  [$f(0) = -1$, $f'(0) \neq 0$. $\pi : 4x + y + z = 0$; $\hat{n} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$].

- Scrivere l'equazione della retta tangente a $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ F(x,y) = F(2,1)\}$ in $(2,1)$, dove $F$ è la funzione $F(x,y) = (y^2-1)e^{xy}$ e determinare i punti critici di $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ F(x,y) = c\}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.
  [y=1. $O(0,0)$ punto critico per $c = -1$].

- Sia $F_a(x,y) = \sin x + e^{x+y} + ax + y^3 + y - 1 = 0$.
    - Stabilire per quali valori di $a$ $F_a(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ o una funzione $x = g(y)$ intorno a $O(0,0)$.
    - Stabilire per quali valori di $a$ $O$ è punto di massimo per $f$.
    - Stabilire per quali valori di $a$ $f$ è decrescente.

  [$f$ esiste $\forall a \in \mathbb{R}$; $g$ esiste per $a \neq -2$. $O$ è massimo per $f$ per $a = -2$. $f$ è decrescente per $a > 1$].