Analisi Matematica II, Ing. Aerospaziale (Canale A-K)
Silvia Marconi - 22 Maggio 2012 -

Esercizi di ricapitolazione

Equazione di Eulero

Si determini al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = \begin{cases} \lambda x & x \in (0,1] \\ \frac{\lambda}{x^3} & x \in [1,+\infty) \end{cases}$$

Si cerchino poi eventuali valori di λ in modo tale che il corrispondente integrale generale sia di classe $C^\infty(0,+\infty)$.

$[y(x) = \begin{cases} c_1 x^2 + c_2 x^{-2} + \frac{\lambda}{5}x^3 & x \in (0,1] \\ \left(c_1 + \frac{\lambda}{3}\right)x^2 + \left(c_2 + \frac{\lambda}{5}\right)x^{-2} - \frac{\lambda}{3}x^{-1} & x \in [1,+\infty) \end{cases}$

y di classe $C^\infty(0,+\infty)$ per $\lambda = 0$].

Funzioni in due variabili

- Data la funzione in due variabili $\quad f_\alpha(x,y) = \frac{|y|^\alpha \sqrt{x^2+y^2-5}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}$

  1. determinare e disegnare il suo insieme di definizione, stabilendone la natura topologica, al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$.
  2. Fissato $\alpha = 2$, stabilire se la funzione $f_2(x,y)$ è prolungabile per continuità nel punto $(3,0)$ e in caso affermativo, detta $\tilde{f}_2(x,y)$ il suo prolungamento, stabilire lungo quali direzioni $\tilde{f}_2$ è derivabile direzionalmente nel punto $(3,0)$.

  [Insieme illimitato, né aperto né chiuso, connesso per $\alpha > 0$; insieme illimitato, né aperto né chiuso, non connesso per $\alpha \leq 0$; f prolungabile e il limite è 0; $\tilde{f}_2$ derivabile in direzione $\hat{v} = (1,0)$ e $\hat{v} = (-1,0)$].

- Determinare massimi e minimi relativi e assoluti della funzione

  $$f(x,y) = x^2 \ln(y-1) - 8y + y^2$$

  nel suo insieme di definizione.
  [$(0,4)$ punto di minimo, $(2,2)$ punto di sella, $(-2,2)$ punto di sella. f illimitata sia superiormente che inferiormente].

- Data la funzione in due variabili $\quad f(x,y) = \ln(3+xy)$

  1. determinare e disegnare il suo insieme di definizione, stabilendone la natura topologica.
  2. Determinare massimi e minimi relativi e assoluti della funzione sul disco chiuso di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$.

  [$(1,1)$ e $(-1,-1)$ punti di massimo assoluto, $(1,-1)$ e $(-1,1)$ punti di minimo assoluto. $(0,0)$ punto di sella].