Analisi Matematica II, Ing. Aerospaziale (Canale A-K) Silvia Marconi - 24 Maggio 2012 -

Esercizi di ricapitolazione

Equazioni differenziali

- Risolvere il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = x\cos x^2 \ \frac{y^2+2y-3}{y+1} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$
[$y(x) = -1 + \sqrt{4 + 5e^{\sin x^2}}$ soluzione globale in $\mathbb{R}$].
- Determinare l'integrale generale dell'equazione
$$y'' = \frac{1}{x}\,y' + x.$$
[$y(x) = c\,\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + d, \quad c, d \in \mathbb{R},\ x \neq 0$].
- Determinare l'integrale generale dell'equazione
$$y'' + y = \cos x + \frac{1}{\cos x}.$$
[$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{3}{2} x \sin x + \cos x \ln|\cos x|, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$].

Forme differenziali

- Data la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \left(3e^{(a^2+2)x+az} + y^2\right)\,dx + 2xy\,dy + e^{(a^2+2)x+az}\,dz$$
  1. determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che ω sia esatta e calcolare le primitive;
  2. calcolare $\int_\gamma \omega ds$ dove γ è la curva definita da
$$\gamma(\vartheta) = \begin{cases} x(\vartheta) = \cos\vartheta \\ y(\vartheta) = \sin\vartheta \\ z(\vartheta) = -3\cos\vartheta \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

  [ω esatta in $\mathbb{R}^2$ per $a = 1$ e $a = 2$. Primitive $F(x,y,z) = xy^2 + e^{3x+z} + c,\ c \in \mathbb{R}$ per $a = 1$ e $F(x,y,z) = xy^2 + \frac{1}{2}e^{6x+2z} + c,\ c \in \mathbb{R}$ per $a = 2$. $\int_\gamma \omega ds = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$].
- Data la forma differenziale
$$\omega(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2-4}\,dx + y\sqrt{x^2+y^2-4}\,dy$$
  1. stabilire se è esatta nel suo insieme di definizione;
  2. calcolare $\int_\gamma \omega ds$ dove γ è la curva definita da
$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3 \\ y(y) = t \end{cases} \qquad t \in [-2, 2].$$

  [ω esatta in $\mathbb{R}^2$ privato del cerchio di centro l'origine e raggio 2. $\int_\gamma \omega ds = 0$].