Tutoraggio Analisi II, Ing. Ambiente e Territorio
Dott.ssa Silvia Marconi - 27 Aprile '07 -

$\diamond$ Forme differenziali in $\mathbb{R}^2$

Forme differenziali esatte e chiuse. Integrali di forme differenziali su curve di $\mathbb{R}^2$.

- Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove ω è la forma differenziale
$$\omega = \frac{dx}{1+y^2} - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}\, dy$$
e γ è la curva
$$\gamma(t) = \left(e^{\sin t}\, ; \frac{2\cos t}{1+\cos^2 t}\right) \qquad \text{con} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

- Data la forma differenziale
$$\omega = \frac{dx}{x+y} + (x^2+y^2)dy$$
calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è l'arco di parabola $y = x^2$ compreso tra $(1,1)$ e $(2,4)$.

- Data la forma differenziale
$$\omega = \frac{4x^3dx + 4y^3dy}{x^4+y^4}$$
calcolare l'integrale di ω sull'arco di circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2 da $(2,0)$ a $(0,2)$.

- Data la forma differenziale
$$\omega = \left(1 + \frac{y^3}{x^2}\right)dx + \left(y - \frac{3y^2}{x}\right)dy$$
calcolare la primitiva di ω che vale 4 in $(-1,3)$.

- Determinare la funzione $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $\phi(0) = 1$ e la forma differenziale
$$\omega = [2y + y^2\phi(x)]dx + [2x + 2y\phi(x)]dy$$
sia esatta in $\mathbb{R}^2$ e calcolare le primitive di ω.

- Data la forma differenziale
$$\omega = \frac{x+qy}{x^2+y^2}\, dx + \frac{rx+y}{x^2+y^2}\, dy$$
definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, determinare le condizioni su q e r in modo che:
  (a) la forma sia chiusa;
  (b) l'integrale di ω lungo la circonferenza unitaria sia nullo;
  (c) la forma sia esatta in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e calcolare le primitive.