Analisi Matematica, Ing. Civile (Canale A-K)
Silvia Marconi - 23 Novembre 2011 -

$\diamond$ Derivabilità direzionale

Derivate direzionali. Formula del gradiente per funzioni differenziabili.

- Sia $f(x,y) = e^{xy} + \sin x$.
  Calcolare $f_{\vec{n}}(0,1)$ in direzione normale alla retta $3x + 6y - 6 = 0$ nel verso delle x crescenti.
  [Risp.: $\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $f_{\vec{n}}(0,1) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$].

- Sia $f(x,y) = \arccos(4x^2 + 9y^2)$.
  Determinare il dominio e calcolare $f_{\vec{v}}(0,0)$ in direzione normale alla retta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ nel verso delle x crescenti.
  [Risp.: $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $f_{\vec{v}}(0,1) = 0$].

- Data la funzione in due variabili:
  $$f_\alpha(x,y) = \frac{|x|^\alpha \sqrt{x^2 + y^2 - 3}}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2}}$$
  (a) determinare e disegnare il suo insieme di definizione, stabilendone la natura topologica, al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$.
  (b) Stabilire per quali valori del parametro α la funzione è prolungabile per continuità nel punto $(0,2)$. Detta $\tilde{f}_\alpha(x,y)$ il suo prolungamento, stabilire lungo quali direzioni $\tilde{f}_\alpha(x,y)$ è derivabile direzionalmente nel punto $(0,2)$.
  [Risp.: $\alpha > 1$].

$\diamond$ Massimi e minimi relativi ed assoluti

Massimi e minimi relativi per funzioni in due variabili. Punti critici. Punti di sella. Matrice Hessiana e studio dell'Hessiano per determinare la natura dei punti critici. Teorema di Weierstrass. Massimi e minimi vincolati.

- Sia $f(x,y) = x^2 \ln(y-1) - 8y + y^2$.
  Determinare i massimi e minimi relativi.
  [Risp.: Dominio: $y > 1$. $(0,4)$ minimo, $(2,2)$ e $(-2,2)$ selle].

- Determinare i massimi e minimi relativi della funzione $f(x,y) = x^2 y$.
  [Risp.: $(0,\bar{y})$ $\bar{y} > 0$ punti di minimo, $(0,\bar{y})$ $\bar{y} < 0$ punti di massimo, $(0,0)$ sella].

- Sia $f(x,y) = \ln(3 + xy)$.
  Determinare i massimi e minimi assoluti nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$.
  [Risp.: $(1,1)$ e $(-1,-1)$ punti di massimo, $(-1,1)$ e $(1,-1)$ punti di minimo, $(0,0)$ sella].