

Analisi Matematica, Ing. Civile (Canale A-K)

Silvia Marconi - 01 Dicembre 2011 -

◇ **Forme differenziali**

Forma differenziale esatta. Primitive.

Teorema: se la forma è esatta, l'integrale curvilineo non dipende dal cammino, ma è la differenza dei valori della primitiva agli estremi (con dimostrazione).

Conseguenza: l'integrale di una forma esatta lungo una qualunque curva chiusa è nullo (con dimostrazione).

Generalizzazione del teorema di Torricelli-Barrow.

Teorema: condizione necessaria e sufficiente affinché una forma sia esatta è che l'integrale lungo ogni curva chiusa è nullo.

Controesempio:

- stabilire se la forma differenziale

$$\omega = 3x^2 dx + xy^2 dy$$

è esatta nel suo insieme di definizione.

[Risp.: L'integrale lungo la circonferenza unitaria non è nullo, dunque ω non è esatta in \mathbb{R}^2].

Forma differenziale chiusa.

Teorema: ω esatta in un connesso $A \Rightarrow \omega$ chiusa in A (con dimostrazione).

Insieme semplicemente connesso.

Teorema: ω chiusa in un insieme semplicemente connesso $A \Rightarrow \omega$ esatta in A .

Controesempio:

- stabilire se la forma differenziale

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

è esatta nel suo insieme di definizione.

[Risp.: ω è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che non è un insieme semplicemente connesso. L'integrale lungo la circonferenza unitaria non è nullo, dunque ω non è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$].

Esempio:

- Data la forma differenziale

$$\omega = (y^2 e^{xy^2} - \sin(x - y) + 1) dx + (2xy e^{xy^2} + \sin(x - y) + x) dy$$

calcolare $\int_{\gamma} \omega ds$ con $\gamma : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.
[Ris.: 2π (ω non è esatta)].

◇ Campi vettoriali

Campo vettoriale associato a una forma differenziale. Campo conservativo.

Potenziale. Lavoro del campo lungo una curva. Circuitazione.

Rotore di un campo vettoriale di \mathbb{R}^3 . Campo irrotazionale.