Analisi Matematica, Ing. Civile (Canale A-K)
Silvia Marconi - 05 Dicembre 2011 -

$\diamond$ Forme differenziali

Metodo geometrico e metodo analitico per il calcolo delle primitive delle forme differenziali esatte (o dei potenziali dei campi vettoriali conservativi).

- Data la forma differenziale

  $$\omega = 2xe^{x^2} \sin y \, dx + e^{x^2} \cos y \, dy$$

  determinare le sue primitive e calcolare $\int_\gamma \omega \, ds$ dove γ è la curva $x^2 + 4y^2 = 4$.
  [Risp.: $F(x,y) = e^{x^2} \sin y + c$, $\int_\gamma \omega \, ds = 0$].

- Data la forma differenziale

  $$\omega = \frac{1}{x} \, dx + \frac{1}{y} \, dy$$

  determinare la primitiva che vale 2 in $(1,1)$.
  [Risp.: $F(x,y) = \ln x + \ln y + 2$].

- Data la forma differenziale

  $$\omega = \frac{1}{1+y^2} \, dx + \frac{2xy}{(1+y^2)^2} \, dy$$

  calcolare $\int_\gamma \omega \, ds$ dove γ è la curva $\gamma(t) = \left(e^{\sin t}, \frac{2\cos t}{1+\cos^2 t}\right)$ con $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
  [Risp.: $\int_\gamma \omega \, ds = e - \frac{1}{2}$].

- Dato il campo vettoriale

  $$\vec{F}(x,y) = (e^x[\sin(x+y) + \cos(x+y)], e^x \cos(x+y))$$

  determinare i potenziali e calcolare il lavoro di $\vec{F}$ lungo le curve $\gamma_n(t) = (\cos nt, \sin nt), n \in \mathbb{N}, t \in [0, \pi]$.
  [Risp.: $U(x,y) = e^x \sin(x+y) + c$, $\int_{\gamma_n} \vec{F} \cdot \hat{\tau} \, ds = 0$ se n è pari e $\int_{\gamma_n} \vec{F} \cdot \hat{\tau} \, ds = -(e + e^{-1}) \sin 1$ se n è dispari].

- Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = (x^2 e^{x+y} + 2xe^{x+y}, x^2 e^{x+y})$$

  - determinare il potenziale $U(x,y)$ tale che $U(0,0) = 1$;
  - calcolare il lavoro di $\vec{F}$ lungo la curva
    $\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [0,1].$
  - calcolare $\int_{+\partial D} rot\vec{G}_F \cdot \hat{n}\, ds$ dove ∂D è la frontiera del cerchio di centro l'origine e raggio 1.

  [Risp.: $U(x,y) = 1 + x^2 e^{x+y}$, $\int_\gamma \vec{F} \cdot \hat{\tau}\, ds = e^2$, $\int_{+\partial D} rot\vec{G}_F \cdot \hat{n}\, ds = 0$].

- Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{4x^3\, dx + 4y^3\, dy}{x^4 + y^4}$$

  calcolare $\int_\gamma \omega\, ds$ dove γ è l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio 2 compreso tra $(2,0)$ e $(0,2)$.
  [Risp.: $\int_\gamma \omega\, ds = 0$].

- Data la forma differenziale

$$\omega = \left(2xy - \frac{1}{x}\right) dx + x^2\, dy$$

  determinare le primitive.
  [Risp.: $F(x,y) = x^2 y - \ln x + c$ per $x < 0$ e $F(x,y) = x^2 y - \ln(-x) + c$ per $x > 0$].

- Data la forma differenziale

$$\omega = -\frac{xy}{\sqrt{y - x^2}}\, dx + \left(\frac{3y - 2x^2}{2\sqrt{y - x^2}} + 1\right) dy$$

  determinare un insieme in cui è esatta e calcolare le primitive.
  [Risp.: ω esatta in $\{y > x^2\}$ e $F(x,y) = y\sqrt{y - x^2} + y + c$].