

Analisi Matematica, Ing. Civile (Canale L-Z)

Silvia Marconi - 05 Dicembre 2011 -

◇ Forme differenziali

Metodo geometrico e metodo analitico per il calcolo delle primitive delle forme differenziali esatte (o dei potenziali dei campi vettoriali conservativi).

- Data la forma differenziale

$$\omega = 2xe^{x^2} \sin y \, dx + e^{x^2} \cos y \, dy$$

determinare le sue primitive e calcolare $\int_{\gamma} \omega \, ds$ dove γ è la curva $x^2 + 4y^2 = 4$.

[Risp.: $F(x, y) = e^{x^2} \sin y + c$, $\int_{\gamma} \omega \, ds = 0$].

- Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{1}{x} \, dx + \frac{1}{y} \, dy$$

determinare la primitiva che vale 2 in $(1, 1)$.

[Risp.: $F(x, y) = \ln x + \ln y + 2$].

- Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{1}{1+y^2} \, dx + \frac{2xy}{(1+y^2)^2} \, dy$$

calcolare $\int_{\gamma} \omega \, ds$ dove γ è la curva $\gamma(t) = (e^{\sin t}, \frac{2 \cos t}{1+\cos^2 t})$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

[Risp.: $\int_{\gamma} \omega \, ds = e - \frac{1}{2}$].

- Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = (e^x[\sin(x+y) + \cos(x+y)], e^x \cos(x+y))$$

determinare i potenziali e calcolare il lavoro di \vec{F} lungo le curve

$\gamma_n(t) = (\cos nt, \sin nt)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, \pi]$.

[Risp.: $U(x, y) = e^x \sin(x+y) + c$, $\int_{\gamma_n} \vec{F} \cdot \hat{\tau} \, ds = 0$ se n è pari e $\int_{\gamma_n} \vec{F} \cdot \hat{\tau} \, ds = -(e + e^{-1}) \sin 1$ se n è dispari].

- Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = (x^2 e^{x+y} + 2x e^{x+y}, x^2 e^{x+y})$$

- determinare il potenziale $U(x, y)$ tale che $U(0, 0) = 1$;
- calcolare il lavoro di \vec{F} lungo la curva

$$\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$
- calcolare $\int_{+\partial D} \text{rot} \vec{G}_F \cdot \hat{n} ds$ dove ∂D è la frontiera del cerchio di centro l'origine e raggio 1.

[Risp.: $U(x, y) = 1 + x^2 e^{x+y}$, $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \hat{\tau} ds = e^2$, $\int_{+\partial D} \text{rot} \vec{G}_F \cdot \hat{n} ds = 0$].

- Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{4x^3 dx + 4y^3 dy}{x^4 + y^4}$$

calcolare $\int_{\gamma} \omega ds$ dove γ è l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio 2 compreso tra $(2, 0)$ e $(0, 2)$.

[Risp.: $\int_{\gamma} \omega ds = 0$].

- Data la forma differenziale

$$\omega = \left(2xy - \frac{1}{x} \right) dx + x^2 dy$$

determinare le primitive.

[Risp.: $F(x, y) = x^2 y - \ln x + c$ per $x < 0$ e $F(x, y) = x^2 y - \ln(-x) + c$ per $x > 0$].

- Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{dx}{x+y} + (x^2 + y^2) dy$$

calcolare $\int_{\gamma} \omega ds$ dove γ è l'arco di parabola compreso tra $(1, 1)$ e $(2, 4)$.