Analisi Matematica, Ing. Civile (Canale A-Z)
Silvia Marconi - 20 Dicembre 2011 -

◇ Esercizi vari

- Studiare il carattere della seguente serie nel suo insieme di definizione:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln x - 1)^n}{n + \ln n}.$$

[Risp.: converge per $1 \leq x < e^2$; diverge per $x \geq e^2$; indeterminata per $0 < x < 1$].

- Studiare il carattere della seguente serie nel suo insieme di definizione e se possibile calcolarne la somma:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{3kx - kx^3}.$$

[Risp.: converge a $\frac{1}{1-e^{3x-x^3}}$ per $-\sqrt{3} < x < 0$ e $x > \sqrt{3}$; diverge per $x \leq -\sqrt{3}$ e $0 \leq x \leq \sqrt{3}$].

- Data la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4y}} + 5 \right) dx + \frac{y - 2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4y}}\, dy$$

stabilire se è esatta nel suo insieme di definizione.
Calcolare la primitiva che nel punto $(4, 4)$ assume il valore 0.
Calcolare $\int_{+\partial Q} \omega\, ds$ dove Q è il quadrato di vertici $(3, -1)$, $(3, 5)$, $(-3, 5)$, $(-3, -1)$.
[Risp.: $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y} + 5x - 24$; $\int_{+\partial Q} \omega\, ds = 0$].

- Determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = 2xy - y - 2x^3$$

sull'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq (x - 1)^2\}$.
[Risp.: $(1, 0)$ minimo assoluto, $(0, 0)$ massimo assoluto].

- Calcolare
$$\iint_D (\cos x + xy)\, dxdy$$
sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -2 \le y \le |x| + 1,\ 2|x| \le |y| + 1\}$.

- Risolvere il problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = x^2(2e^{-y} - 1) \\ y(0) = \ln 3 \end{cases}$$
[Risp.: $y(x) = \ln\left(2 + e^{-\frac{x^3}{3}}\right)$ soluzione globale in $\mathbb{R}$].

- Studiare la continuità, la derivabilità, la differenziabilità e la derivabilità direzionale in $(0,0)$ al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}^+$ della funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2} \ln(1 + |y|^\alpha) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
[Risp.: continua per $\alpha > 1$, derivabile per $\alpha \ge 2$, differenziabile per $\alpha > 2$, derivabile direzionalmente per $\alpha \ge 2$ in ogni direzione e derivabile in direzione $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $(1,0)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$].