Analisi Mat. Ing. Civile (Canale A-K e L-Z)
Silvia Marconi - 10 Dicembre 2012 -

◇ Equazioni differenziali ordinarie di Bernoulli

Metodo di soluzione di equazioni differenziali ordinarie di Bernoulli.

- Risolvere i seguenti problemi di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie di Bernoulli.
  - $(I)\quad \begin{cases} 2y' + y\cot x = y^3 \sin x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \qquad (II)\quad \begin{cases} 2y' + y\cot x = y^3 \sin x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

    [Risp.: $y \equiv 0$ soluzione globale in $(0, \pi)$ per (I); $y(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+1-x\right)\sin x}}$ soluzione locale in $\left(0, \frac{\pi}{2}+1\right)$ per (II)].
  - $\begin{cases} y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

    [Risp.: $y(x) = x^4(\ln\sqrt{x})$ soluzione globale in $(0, +\infty)$; $y \equiv 0$ soluzione stazionaria singolare].

- Determinare l'integrale generale dell'equazione
$$y' + \frac{1}{4(x+\sqrt{x})}\, y = \frac{\sqrt{x}}{y}.$$
  [Risp.: $y(x) = \sqrt{\frac{3x^2+4\sqrt{x^3}+d}{3(\sqrt{x}+1)}}$, $d \in \mathbb{R}$].

◇ Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee.

Integrale generale. Problema di Cauchy. Principio di sovrapposizione.
Metodo della somiglianza per il calcolo delle soluzioni particolari.

Risolvere le seguenti equazioni o problemi di Cauchy per equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee.

- $y'' + y = x^2 - 2$ [Risp.: $y(x) = c_1\cos x + c_2 \sin x + x^2 - 4, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$].
- $\begin{cases} 16y'' - 8y' + y = e^{\frac{x}{4}} \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ [Risp.: $y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{32}x^2 + \frac{3}{2}x - 2\right)$].
- $y'' - y + 1 = 3e^{2x}$ [Risp.: $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + e^{2x} + 1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$].
- $y'' + y = \cos x + \frac{1}{\cos x}$

  [Risp.: $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{3}{2}x\sin x + \cos x \ln|\cos x|, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$].
- $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(1 + \cos x) + 5x^2$

  [Risp.: $y(x) = c_1e^{2x}\cos x + c_2e^{2x}\sin x + e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x}\sin x + x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{22}{25}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$].