Esercizi EDO

(1) Calcolare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy associati ad equazioni lineari:

(a) $\begin{cases} x'(t) - x(t) = 1\,, \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (1+t)x'(t) + x(t) = 3t^2 - 6\,, \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'(t)\sin(t) + x(t)\cos(t) = e^t\,, \\ x(\pi/2) = 1\,, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{x'(t)}{1+t} + x(t) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{1+t}\sin(t)\,, \\ x(0) = 1\,, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t}{(t-1)^2}x(t)\,, \\ x(2) = 1\,, \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x'(t) + \dfrac{x(t)}{t} = \sqrt{2-t}\,, \\ x(1) = 4\,, \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x'(t) = 2tx(t)\,, \\ x(0) = -1\,. \end{cases}$

(2) Calcolare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy (specificandone l'intervallo di esistenza massimale):

(a) $\begin{cases} x'(t) = -x^2(t)\,, \\ x(0) = 2\,, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'(t) = 2te^{-x(t)}\,, \\ x(0) = 1\,, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'(t) = \frac{1+x^2(t)}{1+t^2}\,, \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'(t) + t\tan\big(x(t)\big) = 0\,, \\ x(0) = \frac{1}{\pi}\,, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2tx'(t) = (1+t)x(t) + \dfrac{e^t}{x(t)}\,, \\ x(1) = \sqrt{e}\,, \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x'(t) = \cos^2(x(t))\,, \\ x(1) = 0\,, \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x'(t) - 2x(t) = \frac{e^{5t}}{e^t - 1}\,, \\ x(-1) = 1\,, \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x'(t) = (x^2(t) - 1)e^t\,, \\ x(0) = \dfrac{1+e^2}{1-e^2}\,, \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{\sqrt{1-x^2(t)}}{t}\,, \\ x(1) = 1\,, \end{cases}$

(ℓ) $\begin{cases} x'(t) = \frac{e^{-x^2(t)}}{t^2\,x(t)}\,, \\ x(1) = 1\,, \end{cases}$

(m) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x'(t) = te^{t^2 + x(t)}\,, \\ x(1) = \alpha\,, \end{cases}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(n) $\begin{cases} x'(t) = x(t)^2\,, \\ x(0) = 1\,, \end{cases}$

(3) Calcolare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 + x^2(t) + \dfrac{x(t)}{t}\,, & t > 0\,, \\ x(1) = 1\,. \end{cases}$$

(4) Calcolare le soluzioni delle equazioni del secondo ordine:

- $x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = e^t \sin t + 2t^2\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,;$
- $x''(t) + 2x'(t) = e^t + 1 + t^2\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$

(5) Calcolare la soluzione generale dell'equazione:

$$x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 3t^2 + 2 + e^{-2t}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

(6) Calcolare la soluzione del problema di Cauchy:

$$(a) \quad \begin{cases} x''(t) - 4x(t) = t - 2\sin 2t\,, & t \in \mathbb{R} \\ x(\pi) = 0\,, \\ x'(\pi) = 1\,, \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 9e^t\,, & t \in \mathbb{R}\,, \\ x(0) = 10\,, \\ x'(0) = 0\,. \end{cases}$$

(7) Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali ogni soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale $x''(t) - x'(t) + x(t) = e^{2t}$ verifica la condizione $\lim\limits_{t \to -\infty} e^{\alpha t} x(t) = 0$.

(8) Calcolare l'integrale generale della seguente EDO

$$x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = t^2 - 2\,,$$

e la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 2e^{-2t}\,, \\ x(0) = 1\,, \\ x'(0) = 1\,. \end{cases}$$

(9) Calcolare, utilizzando il metodo di somiglianza, le soluzioni delle seguenti equazioni del terz'ordine

$$x'''(t) - 8x(t) = e^t + t\,, \qquad x'''(t) - 6x''(t) + 12x'(t) - 8x(t) = -8 + t^2\,.$$