Febbraio 2021

Esporre lo svolgimento di ogni esercizio e non solo il risultato. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.

1. Stabilire quali tra le seguenti matrici sono diagonalizzabili ortogonalmente e trovare la matrice P e D relativa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $Kerf = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 - x_3 = 0, 2x_1 + x_3 = 0\}$, $f(2,0,0) = (1,2,0,0)$, $f(-1,1,1) = (0,0,1,-1)$. Trovare $f(1,0,1)$. Stabilire quali tra i seguenti vettori appartiene a Imf e trovare la controimmagine di essi: $(0,0,0,0), (1,2,2-2), (1,0,1,3)$.

3. Trovare la dimensione e la base dei seguenti sottospazi:
   - $V \cap U$, dove $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ e $U = \langle (1,0,1,0), (2,1,0,1), (0,0,1,2), (0,1,-2,-3) \rangle$
   - $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] | p(x) + p(x)' \text{ si annulla in } 0\}$
   - le matrici antisimmetriche di ordine 3.

Domande:

1. Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Enunciare la definizione di $U^\perp$ e dire qual è la sua dimensione.
2. Siano A, B, C tre matrici quadrate di ordine 3. Se $AB = AC$, posso concludere $B = C$? E' sepmpre vero o solo sotto certe ipotesi?
3. Quando un sistema omogeneo quadrato può essere incompatibile? Quando ammette soluzioni non nulle?
4. Dati i vettori v e u di $\mathbb{R}^3$, dire qual é la direzione e il modulo del prodotto vettoriale $v \wedge u$. Quando il prodotto vettoriale è nullo?
5. Trovare la retta per $P = (1,2,1)$ ortogonale al piano $x - y + z - 1 = 0$.