Gennaio 2021

Esporre lo svolgimento di ogni esercizio e non solo il risultato. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.

1. Date le rette $r : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2u \\ y = -u + 1 \\ z = u \end{cases}$, determinare:

   a) la retta per $P = (1, 0, 1)$ ortogonale a r ed s;

   b) il piano contenente r e parallelo ad s;

   c) la distanza fra r e $\pi : 2x + y - z = 0$.

2. **a)** Dire quali sono le matrici ortogonalmente diagonalizzabili.

   b) Diagonalizzare ortogonalmente la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Sia $V = \langle (1, 2, 0, 0), (0, -1, -1, 1), (1, 1, -1, 1) \rangle$, $W = \langle (1, 3, 4, -8), (0, 1, -2, 1), (0, 8, -2, -6) \rangle$. Trovare la dimensione ed una base per $V, W, V \cap W, V + W$.

Domande:

1. Sia A una matrice $m \times n$ e $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$. Dire sotto quali ipotesi il sistema $A\underline{x} = b$ si puó risolvere con il metodo di Cramer e spiegare in che cosa consiste tale metodo.

2. Sia $V = \langle (1, -2, 1, 1), (0, 0, 1, 1) \rangle$. Esiste un insieme indipendente di V costituito da 3 vettori? In caso affermativo, fornire un esempio, in caso negativo, motivare la risposta. Esiste un insieme indipendentedi generatori di V costituito da 3 vettori? In caso affermativo, fornire un esempio, in caso negativo, motivare la risposta.

3. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$ costituito dai polinomi la cui derivata si annulla in 0. Determinare la dimensione ed una base per V.

4. Sia A una matrice quadrata di ordine 4 di rango 2. Che rango ha A^2? Che rango ha A^T? Sia B una matrice quadrata non singolare, che rango ha AB?

5. Esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\dim Kerf = 2$ e $f(1, 2, 1) = (0, 0, 1, 1,)$, $f(1, 1, 0) = (1, 0, 0, 0)$?